

A TREATISE
ON
PLANE CO-ORDINATE GEOMETRY
AS APPLIED TO THE STRAIGHT LINE
AND THE
CONIC SECTIONS
WITH NUMEROUS EXAMPLES,

BY

I. TODHUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDU,

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKA-UL-LAH,

Head Master, Normal School, Delhi,

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE
SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYPUR AND SUBA
BEHAR

رسالہ اصول علم هندسہ بالجبر

معدہ بہت سی مثالوں کے

مؤلفہ

ٹاڈ ہنٹر صاحب ایم ای ایف آر ایس

جسکو

منشی محمد ذکاء اللہ صاحب ہیڈ ماسٹر نارمل اسکول دہلی

پتائید مقاصد

سین ٹیفک سوسائٹی علیحدہ و سین ٹیفک سوسائٹی صوبہ بہار

اُردو میں ترجمہ کیا

اور

بہ مقام دہلی مطبع مرتضوی میں باہمام حاجی

محمد عزیز الدین کے مطبوعہ ہوا

سنہ ۱۸۷۱ ع

ٹیفک پبلیشنگ سوسائٹی علیحدہ

فہرست مضامین

۱۰	نقطہ کے معین و محد	پہلا باب
۱۱	خط مستقیم	دوسرا باب
۲۳	مسائل خط مستقیم کے	تیسرا باب
۵۱	خطوط مستقیم	چوتھا باب
۶۸	محد و دین کی تبدیلی بہت	پانچواں باب
۷۵	دارہ	چھٹا باب
۹۱	محوران اصلی قطب و قطبیہ	ساتواں باب
۹۸	قریب البیضوی	آٹھواں باب
۱۳۳	بیضوی	نواں باب
۱۴۵	بیضوی	دسواں باب
۱۶۱	بعید البیضوی	گیارہواں باب
۱۷۴	بعید البیضوی	بارہواں باب
۱۹۵	مساوات عامہ درجہ اول	تیرہواں باب
۲۱۱	مسائل مختلفہ	چودھواں باب
۲۳۴	مختصر طریقہ کتاب	پندرہواں باب
۲۵۹	تراشش مخروطی و نسبت غیر موسیقیہ و موسیقیہ	سولہواں باب
۲۶۶	جواب شالون کے	

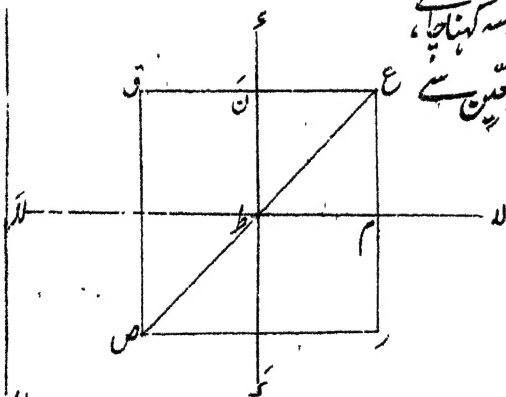
بسم اللہ الرحمن الرحیم
ہندسہ بالجبر یا ہندسہ تحلیلیہ

باب اول

نقطہ کے معین اور متحد

(۱) ایک فرع علم ریاضی کا نام ہندسہ بالجبر یا ہندسہ تحلیلیہ ہے اوس میں اعلیٰ ہندسہ کو جبر مقابلہ سے ثابت کرتے ہیں مگر درحقیقت یہ فرع علم ریاضی کی وہ ہی جہین خواص خطوط مستقیم کے اور خطوط منحنی جو ایک سطح میں واقع ہوں بوساطت دو خطوط کے جن کا نام متحد اور معین تحقیق کئے جائیں اسلئے اس فرع کو ان دو خطوط ہی کا ہندسہ کہنا چاہئے

اب ہم یہ لکھتے ہیں کہ متحد اور معین سے ہماری کیا مراد ہے



فرض کرو کہ سطح مستوی میں ایک نقطہ ط کا ہی اور وہ اپنی جگہ سے ہٹا نہیں اوس میں سے خطوط لاؤ گے
ط سے متقاطع علی القوائم گذرتے ہیں اور سطح مستوی میں ع ایک اور نقطہ ہی اور ع متوازی
ط سے کا ل سے نقطہ پر پڑتا ہوا اور ع متوازی ط کا ل سے نقطہ ل پر پڑتا ہو کچھ تو ثابت ہوا
کہ ط م اور ط ل کے معلوم ہونے سے مقام نقطہ ع کا تحقیق ہو سکتا ہی اس واسطے کہ اگر م اور ل
سے خطوط متوازی ط کا ل اور ط سے نکالیں تو وہ نقطہ ع پر قطع کرینگے

نقطہ ط کو مبدا کہتے ہیں اور خطوط ط لا اور ط ک کو محور اور ط م کو متحدہ نقطہ ط کا اور ط ن کو
یا او کے مساوی مدع م کو متعین نقطہ ط کا کہتے ہیں اور ط م م کو متحدہ نقطہ ط کے
(۲) فرض کرو کہ ط م = لا اور ط ن = ب تو ہم بموجب اپنی حدود کے یہ کہیں گے کہ نقطہ ط کا محدود
برابر ہے لا کے اور متعین نقطہ ط کا برابر ہے ب کے اور اختصاراً یوں کہیں گے کہ نقطہ ط کے محدود
(لا اور ب) ہیں

(۳) محور ط لا پر جو بعد اندازہ ہوتا ہو اسکو اکثر لا کی رمز سی اور جو محور ط پ پر اندازہ ہوتا ہو اسکو
ک کی رمز سی تعبیر کرتے ہیں پس ط لا کو محور لا کا اور ط ک کو محور ک کا کہتے ہیں پس رموز لا اور ک مختلف
عددی قیمتیں مطابق مختلف نقاط کے ہم لگا یا کرتے ہیں اور اس مطلب کو محدود نقطہ ط کے
لا اور ب سطح بیان کیا کرتے ہیں کہ نقطہ ط کے واسطے لا = لا اور ک = ب

(۴) خطوط لا ط لا اور ک ط کے لانا تھا خارج ہونے سے سطح مستوی یا خانہ بن گیا
ہوتی ہی اسلئے ضروری کہ کوئی بات ایسی مقرر کی جائے کہ جسے یہ تمیز ہو جائے کہ نقطہ کس خانہ میں واقع
ہیں اسلئے وہی قاعدہ باتفاق جمہور مقرر ہوا ہے جو ہم نے علم مثلث مستقیمہ الاضلاع کے باب
چہارم میں لکھا ہے۔ اگر ع ن کو ق تک ایسا خارج کریں کہ ن ق = ن ع تو نقطہ ق کے
واسطے لا = لا اور ک = ب اگر ع م کو ر تک ایسا خارج کریں کہ م ر = م ع تو نقطہ ر
کے واسطے لا = لا اور ک = ب اور اگر ع ط کو ص تک خارج کریں اب کہ ط ص = ط ع
تو نقطہ ص کے واسطے لا = لا اور ک = ب

(۵) دفعہ اول کی شکل میں زاویہ یو ط لا قائم ہے تو محوروں کو قائم الزاویہ کہتے ہیں اور اگر زاویہ
ط لا قائم نہ ہو تو محوروں کو محور یا غیر قائم الزاویہ کہتے ہیں۔ جو کچھ اب تک بیان ہوا وہ قائم الزاویہ
اور محور محدودوں سے متعلق ہے آگے سب جگہ محور کو قائم الزاویہ سمجھنا چاہئے اگر بالخصوص
اوسکے خلاف نہ بیان ہوا ہو یہ بات خواہ سب کی تحقیقات ہو یا امثال کا حل ہو دونوں
سمجھنی چاہئے

(۶) سطح مستوی میں نقطہ کا مقام قطبی محدود ہے یہی تحقیق ہو سکتا ہے

فرض کرو کہ ایک قائم نقطہ ہے اور ایک خط قائم ط لہی اور ع ایک اور نقطہ ہی ملاو ط

تو مقام نقطہ کا معین ہو جائیگا اگر مکرزاویہ
لا ط ع اور ب ط ع معلوم ہوں زاویہ کو اکثر سے
اور بعد کو ق سے تعبیر کرتے ہیں ط کو قطب

کہتے ہیں اور ط ل کو خط ابتدائی اور ط ع کو نصف قطر دائرہ نقطہ ع کا اور ع ط ل کو زاویہ

(۷) مقام کسی نقطہ کا فقط مثبت قطبی محدود ہے اور ق سے بیان ہو سکتا ہے کیونکہ یہاں کسی

اشتباہ دفعہ ہ کا سا نہیں پیدا ہو سکتا کہ نقطہ چار قانون میں سے کس خانہ میں واقع ہے

لیکن آسانی کے لئے یہاں بھی چھوٹے اتفاق کر کے ایک قاعدہ دفعہ ہ کا سا بنالیا ہے کہ جو ط ل

ایک سمت میں زاویہ اندازہ ہو یا نہ ہو مثبت زاویہ میں اور دوسری سمت میں اندازہ ہو یا نہ ہو منفی سمجھیں

شکل میں زاویہ ط ل مثبت خیال کیا جائے تو لا ط ق منفی زاویہ ہوگا اگر زاویہ لا ط ق رقبہ

ہو تو یہ ہم کہیں گے کہ لا ط ق کے واسطے = - کہ کچھ ہر ضرور نہیں ہے کہ منفی زاویہ داخل

ہے کے جائیں لیکن اس میں آسانی ہے مثلاً مقام ط ق کا اس طرح سے ہی معین ہو سکتا تھا کہ ط ل

سے مثبت سمت میں زاویہ = اک - کہ اندازہ کرتے اور منفی سمت میں زاویہ = کہ کی نہیں کرتے

اور نصف قطر دائرہ کے ہی مثبت اور منفی قیمتیں داخل کی گئی ہیں اس طرح سی کہ فرض کرو محدود

نقطہ ع کے کہ اور اہر یعنی فرض کرو کہ لا ط ع = کہ اور ط ع = لا اور ع ط کو ع تک

خارج کو پس ط ع = ط ع تو ع اس طرح کہنے سے معین ہو سکتا ہے کہ محدود کہ اور - کہ

پس جب نصف قطر دائرہ منفی مقدار ہو تو ہم اس کو اسی خط پر اس طرح اندازہ کرتے ہیں گویا مثبت

مقدار تھی مگر ط سے مخالف سمت میں
اسے معلوم ہو کہ اگر وہ ایک زاویہ کو اور کسی طول کو تعبیر کرے تو محدود ہے اور - سے
وہی نقطہ دریافت ہوگا جو قطبی محدود کہ + وہ اور س کے معلوم ہوتا

(۸) فرض کرو کہ لہ اور محدودین نقطہ ع کے ہیں اور ط لا محور لہ کا ہی اور نقطہ ط سے ط لا پر عمود نکال دیا جائے اور ر اور ق قطبی محدودین نقطہ ع کے ہیں اگر ہم نقطہ ع سے عمود ط لا پر نکالیں تو کمپوہیہ حاصل ہو گا کہ

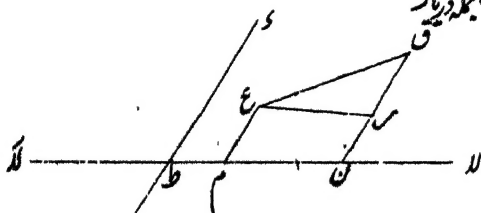
$$لا = نق + جم + ر اور ر = نق + جب ر$$

یہ مساواتیں ایک نقطہ کے قطبی اور قائم الزاویہ محدودین کی تعلقات کو بتاتی ہیں اور اسے ایک شکل سے ہم سمجھ سکتے ہیں۔

$$لا + ر = نق اور نق = لا - ر$$

(۹) اب ہم تقادیر کے لیے سطح محدودین کی ارقام میں پلاٹ کرتے ہیں

جو دو قطرون درمیان واصل اور ط لا کے سطح پر پلاٹ کیے گئے ہیں



فرض کرو کہ ع اور ق دو نقطہ ہیں اور ذراویہ میلان ط لا اور ر ط کا ہی ط کے متوازی ع اور ق کے متوازی فرض کرو کہ لا اور ر نقطہ ع کے اور لام اور م نقطہ ق کے محدودین ہیں ع س متوازی ط لا کا ہی جو تو علم مثلث مستقیمہ الاضلاع کے موافق

$$ع ق = ع م + ق م - ع س ق س جم ع س ق$$

$$ع ق = ع م + ق م - ع س ق س جم$$

$$لیکن ع س = لام - لا اور ق س = م - م - س ایس طرح$$

$$ع ق = (لام - لا) + (م - م - س) + ۲(لام - لا) (م - م - س) جم \dots (۱)$$

پس سطح فاصلہ ع ق دریافت ہو گیا

اگر محور قائم الزاویہ میں تو

$$ع ق = (لام - لا) + (م - م - س) \dots (۲)$$

نقطہ کے معین اور محدود

ابا اولیٰ علیہ السلام کہ وہ نقاط اور قوت مختلف خالوں میں اور مختلف مقاموں میں مقرر کرے

تو، و سبب ضرورتی بین مساوات (۱) (۲) کو صحیح اور درست پایگا

سراوات (۲) سے ہجرت کا حال ہوتا ہے کہ

عق = ع₁ + ع₂ + ع₃ + ... (للمرء - كمرء) ... (س)

اب یہ خاص صورتیں ہیں کہ نقطہ E ہی مسدود ہو تو $LA = 0$ اور $EA = 0$ پس

عق = كم + كم

اگر نقطہ محور لا اور ق محور یر ہو تو $y = 0$ اور $x = 0$ پس

$$عق = مد + ح$$

فرض کرو کہ ہم اور نقطہ ع کے اور بہ اور نقطہ س کے قطبی محمد دین ہوں تو

۱۰ = نق، جم ۱۲ ۱۰ = نق، جم ۱۲

للم = نقم حجم رم كم = نقم حجم رم

ان قیمتوں کو (۳) میں رکھو تو کمپو سیٹ حاصل ہوگا

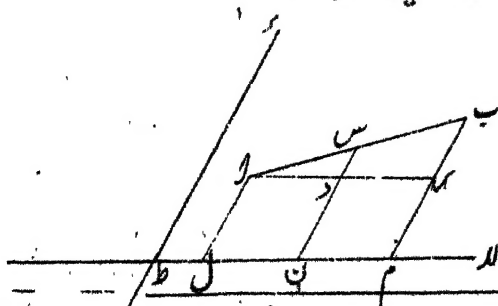
$$عق = نق + نق - ۲نق, جم (۲-۱)$$

عقار = ثقل + ثقل - ثقل (مجموعہ - ۲۱)

اور اس سے مطلب نکالنے

(۱۰) دو نقاط معلوم میں ایک خط واصل کیا گیا ہے اور ایک نقطہ نسبت معلوم تقسیم ہوتا ہے

تو اس نقطہ کی محدبیں کو دریافت کرو



فرض کرو کہ آ اور ب نقاط معلوم ہیں اور ل، ا اور م نقطہ ب کے اور د، م نقطہ ا کے
 محدّدین ہیں اور نسبت معلوم $\frac{ن}{ا}$ اور $\frac{ن}{م}$ کی نسبت ہی۔ فرض کرو کہ $\frac{ن}{س}$ نقطہ مطلوب ہے
 پس $\frac{ا}{س} : \frac{س}{ب} :: \frac{ا}{ن} : \frac{ن}{م}$ اب معین ل ا اور ب م اور س ن کچھ اور اس متوازی
 ط لا کا س ن سے نقطہ درپٹا ہوا کچھ اور فرض کرو کہ لا اور م نقطہ س کے محدّدین ہیں تو شکل
 کے دیکھنے سے یہ امر برہمی ہے کہ

$$\frac{ا}{س} = \frac{ل ا}{د س} = \frac{ل ن}{ن م}$$

$$\frac{ا}{ن} = \frac{ل ا}{ل م} \quad \text{یعنی}$$

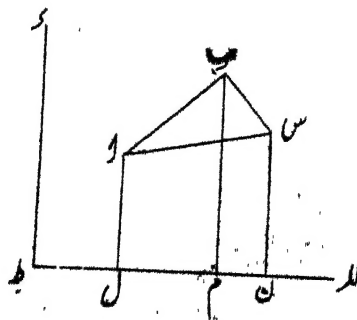
$$\frac{ا}{ن} = \frac{ل ا + ل م + ن م}{ن م + ا م + ل م}$$

$$\frac{ا}{ن} = \frac{ل ا + ل م + ن م}{ن م + ا م + ل م} \quad \text{اور اس طرح}$$

اس دفعہ میں محور قائم الزاویہ اور محور دو نو ہو سکتی ہیں
 اسکی نہایت سہل صورت یہ ہے کہ خط معلوم کی نقطہ وسط کے محدّدین دریافت کریں تو
 $\frac{ا}{ن} = \frac{ن}{م}$ اور

$$\frac{ا}{ن} = \frac{ل ا + ل م}{ل م + ا م} \quad \text{اور}$$

(۱۱) مثلث کے رقبہ کو اون نقطوں کے محدّدین میں دریافت کرو جو اس مثلث کے کونوں پر ہیں



فرض کرو کہ اب میں مثلث ہی اور لدا اور نقطہ کے اور لدا اور ہم نقطہ ب کے اور لدا
 ہم نقطہ س کے مجہدین میں - معین لدا اور ب م اور س ن کچھ تو رقبہ مثلث اب س
 کا برابر ہی منحرف اب ل م + منحرف بس ن م + منحرف اس ن ل اور رقبہ منحرف
 اب م ل کا ل م (ل + ب م)

یہ ظاہر ہی اس لئے کہ اگر بل ملاوین تو منحرف دو مثلثوں میں تقسیم ہوگا جن میں سے ایک کا قاعدہ
 ل ل اور دوسرے کا قاعدہ ب م ہوگا اور ارتفاع ہر ایک مثلث کا ل م ہوگا

پس منحرف اب م ل = $\frac{1}{2} (ل + ب م)$ (ل + ب م)

اور نیز منحرف بس ن م = $\frac{1}{2} (ل + ب م)$ (ل + ب م)

اور منحرف اس ن ل = $\frac{1}{2} (ل + ب م)$ (ل + ب م)

اسی طرح مثلث اب س

= $\frac{1}{2} (ل + ب م)$ (ل + ب م) + $\frac{1}{2} (ل + ب م)$ (ل + ب م) - $\frac{1}{2} (ل + ب م)$ (ل + ب م)
 یہ جملہ قرینہ کے ساتھ اس طرح لکھا جاسکتا ہے کہ

$\frac{1}{2} (ل + ب م)$ (ل + ب م) + $\frac{1}{2} (ل + ب م)$ (ل + ب م) + $\frac{1}{2} (ل + ب م)$ (ل + ب م) ...
 اگر اس کا اختصار کریں تو ہم کو رقبہ مثلث کا یہ حاصل ہوگا کہ

$\frac{1}{2} (ل + ب م)$ (ل + ب م) + $\frac{1}{2} (ل + ب م)$ (ل + ب م) + $\frac{1}{2} (ل + ب م)$ (ل + ب م) ... (۲)

اگر محور زاویہ دیر سیلان کریں تو رقبہ منحرف اب م ل = $\frac{1}{2} (ل + ب م)$ جب د
 اور علیٰ ہذا القیاس اور منحرفون کا حال ہی - پس رقبہ مثلث کا اوپر کے جملوں کو جب د میں
 ضرب دینے سے حاصل ہو جائیگا

خواہ مقامات فضا اب وس کے بدل جائیں مگر مساوات (۲) ہمیشہ مثلث کے رقبہ کے واسطے
 حاصل ہوگی یا اب جملہ حاصل ہوگا جس کی ہر رقم کی علامت بدلی ہوئی ہوگی - نئے علوم
 ہو کہ ہم رقبہ مثلث کا ہمیشہ ارقام جملہ (۲) کے قیموں کے حساب لگانے سے دریافت کر سکتی

(۳) غالباً طالع علم جہ تھا بلکہ مساوات کے درجہ اول اور دوم اور سوم وغیرہ سے واقف ہوگا۔ جب ہم کہتے ہیں کہ مساوات ن درجہ کی درمیان دو مقداریں متغیرہ کی تو اس کی یہ معنی ہوتی ہے کہ ہر ایک رقم اس کی لاڈ کے شکل کی ہی جسمین ط اور دھفر میں یا ایسی مثبت صحیح عدد میں کہ ط + د برابر ان کے ہے ہر ایک رقم کے واسطے یہ کیفیت ہی کسی رقم میں وہ نسبت ان کی بڑی نہیں اور ایسی مقدار ہی کہ عدد اس کی واسطے ایک دفعہ تعین ہو چکا ہی اوس میں تغیر کہی نہیں ہوتی اور اس واسطے بنتی ہے کہ ایسی رقموں سے ایک سلسلہ علامت + اور - سے متسلل بنایا گیا ہی اور جو کچھ حاصل ہوا ہی اوسکو = کے لکھا ہی اسکا نام مساوات ہی

امثلہ

(۱) قطبی محدودین اور نقطوں کے دریافت کرو جنکی قائم الزاویہ محدودین تفصیل ذیل میں

$$(۱) \quad ۱ = ۵ \quad ۱ = ۵ \quad (۲) \quad ۱ = ۵ \quad ۱ = ۵$$

$$(۳) \quad ۱ = ۵ \quad ۱ = ۵ \quad ۱ = ۵ \quad ۱ = ۵$$

اور نقطوں کو شکل میں بتاؤ

(۲) قائم الزاویہ محدودین اور نقطوں کے دریافت کرو جنکی قطبی محدودین تفصیل ذیل میں

$$(۱) \quad ۱ = ۵ \quad ۱ = ۵ \quad (۲) \quad ۱ = ۵ \quad ۱ = ۵$$

$$(۳) \quad ۱ = ۵ \quad ۱ = ۵ \quad (۴) \quad ۱ = ۵ \quad ۱ = ۵$$

اور نقطوں کو شکل میں مقرر کرو

(۳) محدودین نقطہ کے ۱ اور ۲ میں اور نقطہ ق کے ۳ اور ۴ تو طول ع ق کا دریا کر

(۴) سوال اول میں جن نقطے دریافت ہوں ان میں جو خطوط وصل کرنے سے شلت بنے

اوسکا رقبہ دریافت کرو

(۵) ایک نقطہ محور لا کر اور ایک نقطہ محور دیکر نقطہ وسط لایے محدودین کو

اور ب کے محدودین کے ارقام میں بیان کرو اور یہ بھی ثابت کرو کہ بعد اس نقطہ کا

۱ سے ۱ = ۵

نقطہ کے معین اور محدود

باب اول

(۶) مساوات (۲) دفعہ ۱ کو تحویل پسینی صورت کی طرف کرو کہ جسمین رقبہ مثلث کا لفظ

زاویہ کے قطبی محدودین میں بیان ہوا اور بلا واسطہ غیر فقط شکل سے یہہ نتیجہ حاصل کرو

(۷) آ اور ب دو نقطے ہیں اور ط بمذہبی رقبہ مثلث ا ب کو ا اور ب کے محدودین کے رقبوں

میں اور نیز ارقام قطبی محدودین ا اور ب میں ہی بیان کرو

(۸) آ اور ب اور س تین نقطے ہیں خطے محدودین دفعہ ۱۱ میں بیان ہو ہیں فرض کرو کہ ا ب کا

وسط اسی ملاؤ س داور اوسکو نقطہ ح پر ایسا تقسیم کرو کہ س ح = ح د تو نقطہ ح کی

محدودین دریافت کرو

(۹) مثال گذشتہ میں اگر قطع ا و ب اور نقاط ا و ب سے خطوط وصل کر کے تین مثلث ا ب اور ج ب س

اور ج ا س بنائیں تو ہر ایک مثلث انہیں سے برابر ایک تہائی مثلث ا ب سے ہوگا

دفعہ ۱۱ دیکھو

(۱۰) ا اور ب دو نقطے ہیں اور ح نقطہ ا کے ر اور ب کے ر اور ق ہیں اور

ایک خط بمذہب سے زاویہ ا و ب کی تقصیف کرتا ہو کہ ہی گیا ہی اگر س وہ نقطہ ہو جس پر یہ

خط ا ب سے ملتا ہے تو ثابت کرو کہ قطبی محدودین نقطہ س کے یہہ ہیں کہ

$r = \frac{1}{2} (r_1 + r_2)$ اور $q = \frac{1}{2} (q_1 + q_2)$

(۱۱) مثال ۸ میں قیمت س د اور د ا کی اون محدودین کی رقبوں میں دریافت کرو جو د

بیان ہوئی ہیں اور ثابت کرو کہ

$r_1 + r_2 + r_3 = r_4 + r_5 + r_6$

(۱۲) مثال ۹ میں قیمت ا اور ب اور ج ب اور ج ا اور محدودین کے رقبوں میں دریافت کرو

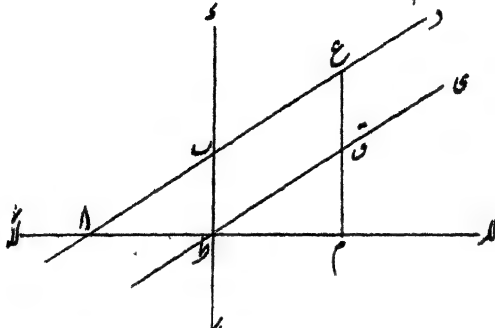
جو وہاں شعل ہوئی ہیں اور ثابت کرو کہ

$r_1 + r_2 + r_3 = r_4 + r_5 + r_6$

باب دوم

خط مستقیم

(۱۴) ایک خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو



اول ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ خط مستقیم کسی محور کا متوازی نہیں ہے
فرض کرو کہ اب د ایک خط مستقیم اور وہ محور سے نقطہ پر ملتا ہے۔ ایک خط ط ای نقطہ میں
سے متوازی اب د کا کچھ۔ اب د میں کوئی نقطہ ع کا مقرر کرو اور ع م متوازی ط د کا ط لا
سے نقطہ م پر اور ط ای سے نقطہ ق پر ملتا ہوا کچھ۔

فرض کرو کہ ط ب = س اور م اس نی ط لا = م اور محدودین نقطہ ع کے لا اور د تو

$$ر = ع م = ع ق + ق م$$

$$= ط ب + ق م$$

$$= س + ط م م کس ق ط م$$

$$= س + م لا$$

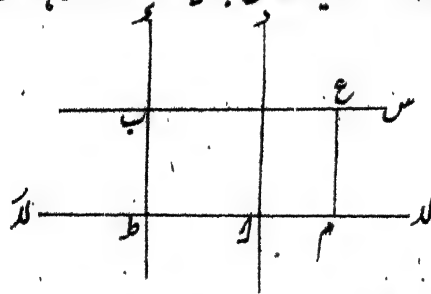
پس مساوات مطلوب یہ ہے کہ $ر = م لا + س$

ط ب کو محور کا حصہ مانی کہتے ہیں۔ اگر محور کو سمت منفی میں خط قطع کرے تو منفی
زاویہ ق ط م یا اب د کے ماس کو م سے تعبیر کیا ہی یعنی اوس زاویہ کا ماس مقرر کیا
یہ خط کا حصہ محور کے جانب بالادین واقع ہو کر لا کی محور محدودہ کے ساتھ مثبت سمت میں
بناتا ہے۔ مے معلوم ہوا کہ خط جو محدودین سے ہو کر متوازی خط معلوم کا ہی درمیان ط لا اور
ط لا کے واقع ہو تو م ماس زاویہ حادہ کا ہوگا اور مثبت ہوگا اور اگر درمیان ط لا اور

ط لا خارج شدہ کہ جانب چپ میں واقع ہو تو ماس زاویہ منفی ہوگا اور منفی ہوگا۔ چونکہ ایک ہی خط مستقیم رنگی م اور سر نہیں بدلنے اسلئے اونکو مقدار مستقل کہتے ہیں کہ او میں کبھی کچھ تغیر نہیں ہوتا۔ لیکن لا اور د کی بیش یا قیمتیں ہو سکتی ہیں کیونکہ جو چاہر قیمت لائی مقرر کرے اسکی مطابق قیمت د کی مساوات د = م لا اس سے دریافت ہو جائیگی سو اسلئے لا اور د کو مقدار متغیر کہتے ہیں یا فقط متغیر اسلئے کہ وہ ہمیشہ بدلتی رہتی ہیں ایک حال پر نہیں رہتی ہیں اگر خط مبدا میں گزرے تو س = ۰ کے ہوگا اور مساوات کی صورت یہ ہو جائیگی کہ

(۱۵) اب ہم وہ صورتیں بیان کرتے ہیں جن میں خط متوازی کسی محور کا ہو
اگر خط متوازی محور لا کا ہو تو م = ۰ اور مساوات یہ ہو جائیگی

اگر خط متوازی محور د کا ہو تو م ماس زاویہ قائمہ کا ہو جائیگا اور اسلئے لا انتہا ہوگا تو یہ تحقیقات سب سے بیان کیے گئے ہیں ماسلئے اس کے جداگانہ تحقیقات کرنی پڑی۔ اب ہم ان دو صورتوں کی جدا تحقیقات کرتے ہیں مساوات ایک خط کی جو ایک محور کا متوازی ہو تحقیق کرو



اول فرض کرو کہ خط محور لا کا متوازی ہے اور خط بس محور د سی نقطہ پر ملتا ہی فرض کرو کہ ط ب = ص چونکہ خط محور لا کا متوازی ہے تو ص م معین اس کے کسی نقطہ کا برابر ط ب کے ہے۔ اسے معلوم ہو کہ کسی نقطہ ص کے معین کا نام د رکھا جائے مساوات خط کی یہ حاصل ہوگی کہ

لا = ص

اب فرض کرو کہ محور د کا خط متوازی ہی اور خط لا محور د سے نقطہ پر ملتا ہی اور ط = ص

اسی خط متوازی محور کا ہی اگلے واسطے کسی نقطہ کا محدود Δ ہی اسے معلوم ہوا کہ خط کے
اسی نقطہ کے سر کا نام Δ کہیں تو یہ مساوات خط کی حاصل ہوگی کہ
 $\Delta = \text{شش}$

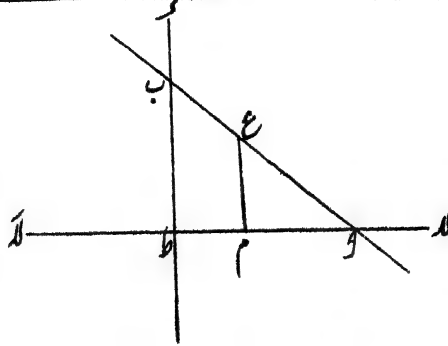
(۱۶) اب ہم ثابت کر دیا کہ ہر خط مستقیم کی مساوات پہلے درجہ کی ہوتی ہی اب ہم یہ ثابت کر لیں کہ ہر
درجہ اول کی جسمین دو مقداریں تغیر ہوں ایک خط مستقیم کو تغیر کرتی ہے
مساوات عام درجہ اول کی جسمین دو مقداریں تغیر ہوں اس صورت کی ہوتی ہی
 $\Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta = 0$ (۱)

اور ب اور س مقدار محدود یا صفر ہیں

اول فرض کرو کہ ب صفر نہیں ہے تو ب تقسیم کرنے سے مساوات (۱) سے یہ حاصل ہوگا
 $\Delta = -\Delta - \Delta - \Delta - \Delta - \Delta$ (۲)

دفعہ ۱۴ میں ہم بیان کر چکے ہیں کہ اگر ایک خط محور سے ملتا ہو امبد ہی سب کی فاصلہ
کچھ یکساں اور زاویہ محور لائے ایسا بنائی کہ جس کا ماس Δ ہو تو (۲) مساوات اس خط کی ہوگی
اسے ثابت ہوا کہ مساوات (۲) اگلے اصل مساوات (۱) ایک خط مستقیم کو تغیر کرتی ہے
اگر $\Delta = 0$ تو بموجب دفعہ ۱۵ کے خط (۱) سی تعبیر کیا گیا متوازی محور Δ کے ہوگا
اگر ب = 0 تو مساوات (۱) کی صورت یہ ہو جائیگی
 $\Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta = 0$
 $\Delta = 0$

بموجب دفعہ ۱۵ کے معلوم ہے کہ یہ مساوات اس خط کی ہی جو محور کی متوازی ہو
پس اسے ثابت ہوا کہ مساوات $\Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta = 0$ ہمیشہ ایک خط کو تغیر کرتی ہے
(۱۷) مساوات حصص بائیں کی ارقام میں - ایک خط کی مساوات محور کی حصص بائیں
کے ارقام میں بھی بیان ہو سکتے ہیں



فرض کرو کہ نقاط ل اور ب پر محور ل اور د سے خط ملتا ہے اور ط ل = سش اور ط ب = ص کے
فرض کرو اور ع کوئی نقطہ خط میں اور ل اور د اس کے محدودین مقرر کرو ع م متوازی ط کا کچھ
تو مثلثوں کے متشابه ہونے سے

$$\frac{ط ب}{ط ل} = \frac{ع م}{ط و}$$

$$\text{یعنی } \frac{ص}{ط ل} = \frac{سش}{ط و}$$

$$\therefore \frac{ص}{ط ل} + \frac{سش}{ط و} = 1$$

(۱۸) طالب علم کے لئے یہ پیش فائدہ مندرجہ ہے کہ وہ بعض معلوم مساواتوں کے مطابق خطوط رسم کرے
مثلاً مساوات یہ ہو ۲ + ۳ = ۵ لہذا ۲ کے مطابق خط رسم کرو جو کہ خط مستقیم اس کے دو نقطوں
کے معلوم ہونے سے دریافت ہو جائے گا اسلئے ہم جس طرح چاہیں دو نقطے اس خط کے دریافت
کریں پھر خط او نہیں وصل ہوگا وہ وہی خط مطلوب ہوگا۔ فرض کرو کہ ل = ۵ تو مساوات
سے یہ حاصل ہوگا کہ د = ۲ اسے معلوم ہوگا کہ نقطہ جس کا محدود = ۱ اور معین = ۲ ہے اس
خط پر واقع ہے۔ پھر فرض کرو کہ ل = ۲ تو د = ۳ تو نقطہ جس کا محدود = ۲ اور معین = ۳
ہے اس خط پر واقع ہے پس جو نقطے سطح معلوم ہوئی ہیں او نہیں خط ملے تو یہ خط دونوں
طوط غیر متناہی کھینچا گیا مقام النقاط مساوات معلوم کا ہوگا جن دو نقطوں پر خط محور کو کاٹتا
وہ بہت آسانی سے دریافت ہو سکتے ہیں فرض کرو کہ ل = ۵ مساوات معلوم میں تو د = ۳
یعنی محور کے جس نقطہ پر خط گذرنا ہی اس کا فاصلہ مبدا سے ۳ ہے یہی فرض کرو کہ د = ۵
تو ل = ۳ یعنی محور ل کے جس نقطہ پر خط گذرنا ہی اس کا فاصلہ مبدا سے ۳ ہے

باب دوم جو دو نقطہ تین ہو ہیں ان کے درمیان خط مستقیم وصل کر کے دو زوایاں لائے نہایت بڑا ملے گا
وہ مساوات معلوم کا مقام ان نقاط ہوگا محور ان اور خط کے نقاط تقاطع جس طرح ہم تحقیق کئے تھے
اسے سوار اس طرح ہی مساوات سی فوراً تحقیق ہو جائیں کہ مساوات کو صحت سے لکھیں

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

اب پہر اس کو مساوات دفعہ ۱ سے مقابلہ کریں

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

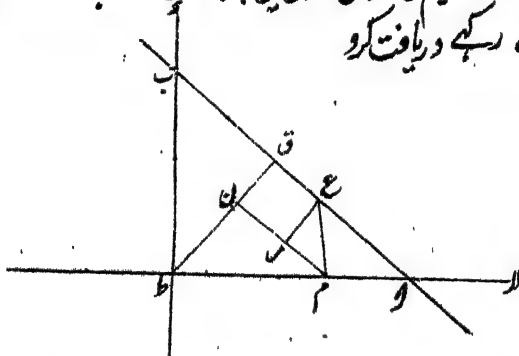
تو معلوم ہوگا کہ $\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ اور $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

پہر فرض کرو کہ $r = 1$ کے مساوات مفروضہ ہے چونکہ مساوات کے شرائط $l = 0$ اور $r = 0$ کے
فرض کرنے سے پوری ہوتی ہے اسے معلوم ہوا کہ خط جس مساوات کو تعبیر کرتا ہے مبدعین گذرنا ہے
اسلئے اب فقط ایک اور نقطہ کے دریافت کرنیکی ضرورت رہی فرض کرو کہ $l = 0$ اور $r = 1$ اسلئے
دوسرا نقطہ معلوم ہو گیا اور اس سبب خط کھینچ گیا۔ مساوات معلوم کا مقابلہ اگر دفعہ ۲ کی مساوات کی
اس صورت سے کریں کہ $r = 1$ ملاحظہ ہو خط بن جائیگا اس مساوات سے ہم جانتے ہیں کہ وہ خط تعبیر ہوتا ہے
کہ مبدعین گذرنا ہے اور محور سے وہ زاویہ بناتا ہے جسکا ماس m ہی ہے معلوم ہوا کہ مساوات
 $r = 1$ لا اس خط کو تعبیر کرتی ہے جو مبدعین گذرنا ہے اور محور سے زاویہ 90° کا بنانا ہے
اور علیٰ هذا القیاس $r = -1$ لا اس خط کو تعبیر کرتا ہے جو محور سے زاویہ 180° پر میلان کرتا ہے
ماس $m = 0$ یعنی 90° کا زاویہ وہ خط محور کے ساتھ بناتا ہے اسے معلوم ہوا کہ مساوات اس خط
کو تعبیر کرتی ہے جو نقطہ ط پر گذرنا ہے اور شکل دفعہ ۱۲ میں خطوط $r = 1$ اور $r = -1$ جو جانب مبدعین
بڑائی جائیں تو ان کی درمیانی زاویہ کی یہ خط تہذیب کرتا ہے

(۱۹) طالب علم پر لازم ہے کہ دفعات بالا کے مضامین کو خوب سمجھ لوجہ کے پہرے بڑے
چتر مقابلہ میں جو مساوات غیر العین کے مسائل لکھے گئے ہیں اکثر ان پر طالب علم کوئی توجہ کم ہوتی ہے
اسلئے جب طالب علم مضمون کو دیکھ کر شروع کرتا ہے جہاں اس کو کام لکھا ہے اسی مساوات
سے پڑتا ہے کہ ہمیں وہ معلوم ہے کہ مبدعین اور اکثر ان کے حل لائے نہایت ہوتے ہیں تو اس کی طبیعت بعض

اوقات بڑی الجہتی ہی اسبک جو کچھ ہم نے لکھا ہی اوسکا نتیجہ اعظم یہ ہے کہ خط مستقیم مساوات درجہ اول سے تعبیر ہوتا ہی طالب علم کو ایسی عادت کر لینی چاہئے کہ جب مساوات اوسکے سامنے آئی تو اوسے ایک خط مستقیم سمجھ جائی خط مستقیم مساوات سے اس طرح دریافت ہوتا ہے کہ اول دو نقطے جنہیں خط گذرنا ہی ایسی دریافت کرتی ہیں جنہوں سے ہر ایک کے محدودین شرائط مساوات معلوم کو پورا کرتی ہیں پس خط جو اس طرح معین ہو جائے گا، اوسکے ہر نقطہ کے محدودین مساوات کی شرائط کو پورا کرتی ہیں۔

(۲۰) مساوات خط مستقیم کی عمود کی رقموں میں جو تبدیلی نکالاجائے اور اوس میلان کی رقموں میں جو یہ عمود محور سے رکھے دریافت کرو



فرض کرو کہ ط ق عمود کی سب سے خط اب پر نکال جائے۔ کوئی نقطہ خط میں مقرر کر دیجئے م عمود ط لا پر اور م ق عمود ط ق پر اور ع س عمود م ن پر نکالو۔ فرض کرو کہ ط ق ع اور زاویہ ق ط لا = ۹۰° اور لا اور محدودین نقطہ ق کے تو

$$\begin{aligned} \text{ط ق} &= \text{ط ن} + \text{ن ق} = \text{ط ن} + \text{ع س} \\ &= \text{ط م} + \text{م ق} + \text{ط لا} + \text{ع م جب ع م س} \\ &= \text{لا ح م} + \text{ج ب} = \end{aligned}$$

اسی واسطے مساوات خط کی ہے

$$\text{لا ح م} + \text{ج ب} = \text{ع س}$$

(۲۱) خط مستقیم کے مختلف صورتوں کے مساوات کی تحقیقات جدا جدا دفعات ۱۴، ۱۵، ۱۶ اور ۱۷ میں کیے گئے ہیں۔ ان صورتوں میں سے ہر ایک صورت کے اور باقی صورتیں مستنبط ہو سکتی ہیں اگر اوقاف ارتباطات کو کام میں لائیں جو مقام میں متعلق ہیں۔ کہتی ہیں جس مقدار کو ہم نے دفعہ ۱۷ میں سے تعبیر کیا تھا یعنی ط ب کو اوسکو دفعہ ۱۷ میں سے تعبیر کیا ہے

دفعہ ۱ امین ص = مس ب لاط = مس (ک - ب لالا) (۱)
دفعہ ۲ امین ہم ماس ب لالا کو م سے تغیر کرتے ہیں
ص = م - م (۲)

دفعہ ۳ امین ط لاجم ہ = ط ق اور ط ب جب ہ = ط ق یعنی

ع = س جم ہ = ص جب ہ (۳)

اسی واسطے مساوات (۲) اور (۳) سے م = م - م (۴)
اور اگر مساوات لالا + ب ل + س =

اوس خط کو تغیر کریں جس پر ہم بحث کر رہے ہیں تو بموجب دفعہ ۱ کے

- $\frac{1}{2} = م - س = ص$ (۵)

یہ $\frac{1}{2} = م - م$ اور $\frac{1}{2} = -$ جب ہ (۶)

ان ارتباطات کی وجہ سے ہم دفعات ۱۲ اور ۱۳ سے مساواتوں کی تطبیق ثابت کر سکتے ہیں
اور ان میں ایک سے باقی کو مستنبط کر سکتے ہیں

(۲۲) مساواتوں کی تحقیقات میں طالب علم کو چاہئے کہ شکلیں طرح طرح سے بد لگ کر رسم کریں

دفعہ ۱ امین شکل کے اندر فرض کرو کہ نقطہ خارج شدہ ب امین

محور لاکے نیچے واقع ہو تو یہی ہو کہ یہ محال ہے کہ $\frac{1}{2} = م - م$ یا $\frac{1}{2} = م - م$

اب چونکہ نقطہ محور لاکے نیچے واقع ہے اوس کا معین و مقدار منفی ہی اسے معلوم ہوا کہ م = س
لے نہیں رکھنا چاہئے بلکہ م = - کے مندرج کرنا لازم ہے۔ چونکہ م سے ہماری مراد ایک
خاص طول سے ہوتی ہے جو مثبت لیا جائے پس

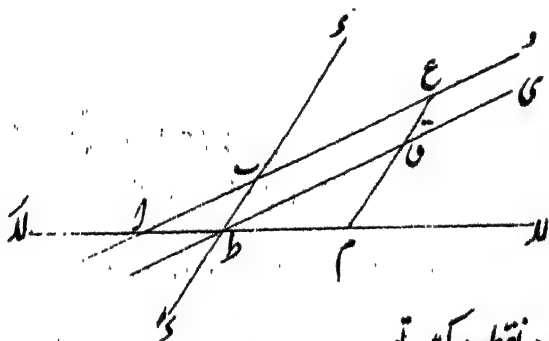
- $\frac{1}{2} = م - م$

اور اس واسطے موافق سابق کے $\frac{1}{2} = م - م$ کے حاصل ہوگا

محدودین محرف

(۳۳) مساوات خط مستقیم کی
ہم محور کے زاویہ میل کو د سے تغیر کریں گے
اول فرض کرو کہ خط متوازی کسی ایک محور کا نہیں ہے

فرض کرو کہ اب د ایک خط مستقیم محور سے نقطہ ب پر ملتا ہے۔ ط آئی سید سے متوازی ہے
کا کچھ اور کوئی نقطہ مقرر کرو اور ع م متوازی ط کا ل سے نقطہ م پر اور ط آئی سے نقطہ ق پر
ملتا ہوگا کچھ اور فرض کرو کہ ط ب = س اور زاویہ ق ط م = ۵



فرض کرو کہ لا د محدودین قطع کی ہیں تو

$$س = ع م = ع ق + ق م = ط ب + ق م$$

$$\text{لیکن } \frac{ق م}{ط م} = \frac{جب (د-۵)}{لا (خ-۵)}$$

$$\therefore ق م = \frac{جب (د-۵)}{لا (خ-۵)}$$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوب یہ ہے کہ

$$س = \frac{لا (خ-۵)}{جب (د-۵)} + س$$

اگر ہم جب (د-۵) کی جگہ م رکھیں تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$س = م + لا$$

یہی دفعہ ۱۷ میں حاصل ہوا تھا

معنی سے کہی ہیں جو پہلے تھی - خط جو محور لا کے ساتھ میل رکھتا ہے اس کی جیب کو جو مثبت
اوس میل کے جیب کے ساتھ ہے جو خط محور سے رکھتا ہے اوس کو م تبعد کر تا ہے - چونکہ جب ہ
ہمیشہ مثبت ہوگی اس لئے م کا مثبت یا منفی ہونا جب (د - ہ) کے مثبت یا منفی ہونے پر موقوف ہوا
پس م مثبت ہوگا جب خط درمیان ط و اور ط لا کے واقع ہو اور منفی ہوگا جب درمیان ط و
اور ط لا کے واقع ہو اور یہی صورت م کے پہلے بیان ہوئی ہے

یہاں اور دفعہ ۱۴ میں منفی م کی ایک ہی ہو گئے اگر د = کہے کیونکہ م = مس ہ

$$(۲۲) \quad \text{چونکہ } م = \frac{\text{جیب } ۵}{\text{جیب } (۵ - د)}$$

$$\therefore م (\text{جیب } د - م) = \text{جیب } ۵$$

$$\therefore م (\text{جیب } د - م) = \text{مس } ۵$$

$$\therefore \text{مس } ۵ = \frac{\text{جیب } د}{م + ۱}$$

$$\text{اسے معلوم ہوا کہ جب } ۵ = \frac{\text{جیب } د}{م + ۱}$$

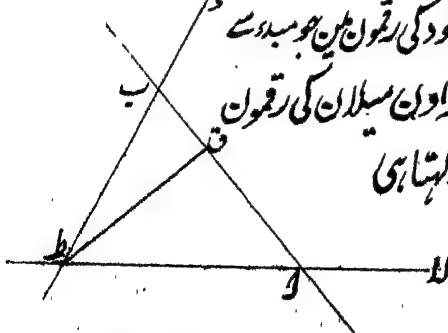
$$\text{جم } ۵ = \frac{\text{جیب } د}{(م + ۱)}$$

چونکہ جب ۵ مثبت ہی اس لئے ہوگا اور یہی چلا گئی چلے گئے جب م مثبت ہو اور پنج کی علامت لینی جائے اگر
(۲۵) دفعہ ۱۵ اور ۱۶ کی تحقیقات بغیر کسی تغیر و تبدل کے محور محوروں سے بھی تعلق ہو سکتی ہے
اور تحقیقات دفعہ ۱۴ میں حاجت اس کی پرتی ہی کہ مقدار مستقل کی معنی میں کچھ ضروری تبدل ہو

(۲۶) مساوات خط استیقام کی اوس عمود کی رقموں میں جو مبدا سے

خط پر نکالا جائے دریافت کرو اور اویں میلان کی رقموں

میں جو یہ عمود محوروں سے رکھتا ہے

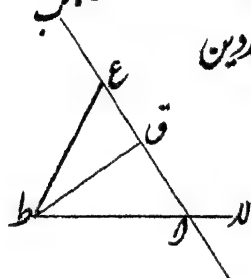


طاق عمود مبدا سے اب پر نکالو اور فرض کرو کہ ط ق = ع اور ط لا = س
اور ط ب = ص اور اگر ہم فرض کریں کہ ق ط لا = ۵ توق ط ب = ۵ - س اور

کہ نق ثابت اور منحنی حسب حال ہوگا
پس جب ہم مساوات خط استقیم کی اس صورت میں لکھتے ہیں کہ

$$\frac{لا-ح}{ن} = \frac{ر-ق}{ن}$$

اور ل اور ن کی قیمتیں معلوم جو اوپر بیان ہوئیں حساب میں لگاتی ہیں تو $\frac{لا-ح}{ن}$ اور $\frac{ر-ق}{ن}$ میں
ہر ایک تعداد کے اعتبار سے برابری نقطہ (ح اور ق) اور نقطہ (لا اور ر) کے فاصلہ درمیانی کے ہے
لیکن علامت ہر جملہ کی ہو تو دونوں نقطوں کی مقامات اضافی پر ہوگی



قطبی محدودین

(۲۸) قطبی مساوات ایک خط استقیم کی

فرض کرو کہ اب خط استقیم ط ق اوپر عمود ہو اور مبدأ سے مقام ابتدائی ط لا ہے اور

ع کوئی نقطہ خط استقیم میں ہے

فرض کرو کہ ط ق = ح اور زاویہ ق ط لا = ۵ اور نق اور ر قطبی محدودین نقطہ ع کی ہیں تو

$$ط ق = ط ع + جم ع ط ق$$

$$\text{یعنی } ع = نق - جم (۵ - ر)$$

یہ قطبی مساوات خط کی ہے

(۲۹) قطبی مساوات اور مساوات سی کہ قائم الزاویہ محدودین میں ہو نکل سکتی ہے فرض کرو

$$لا + ب + ر + س = ۰$$

ایک خط استقیم کی مساوات ط باط قائم الزاویہ محدودین کے ہو۔ اور میں سجا کے نق جم
اور سجا کے نق جب ر بموجب دفعہ ۸ کے رکھ لو تو

$$لاق جم + ب + نق جب ر + س = ۰ \dots \dots (۱)$$

یہ قطبی مساوات ہی اور یہ مساوات اس مساوات سے کہ

ع = نق جم (۵-۵) (۲)

یہی مطابق ہو سکتی ہے

اس واسطے کہ موجب دفعہ ۲۱ کے ہم کو حاصل ہے کہ

نق = مم ۵ اور سب = -- جب ۵
اس سبب مساوات (۱) کی یہ صورت ہوگی کہ

یہ (۲) کے ساتھ مطابقت ہے

(۳) مساوات جو بعد پر گذرنا ہی موافق دفعہ ۱۴ کے یہ ہے کہ

بجای لا کے نق جم را اور بجای ر کے نق جب ر لکھو تو مساوات یہ ہو جائیگی کہ

نق جب ر = مم نق جم ر

یہ مساوات اس خط کی ہے جو بعد میں گذرنا ہے

اب ہم خط استقیم کے مساوات کے مختلف صورتیں جو اور ثبات ہوئیں ہیں یہاں کہہ دیتے ہیں

ر = مم لا + س دفعہ ۱۴ اور ۲۳

لا = متقل یا = متقل دفعہ ۱۵ اور ۲۵

لا + س = لا - ۱ = ۰ دفعہ ۱۴ اور ۲۵

لا جم ۵ + س جب ۵ = ع = ۰ دفعہ ۲۰ کے

ر = جب (۵-۵) لا + س دفعہ ۲۳ کے

لا جم ۵ + س جب ۵ = ع = ۰ دفعہ ۲۶

لا - ع = ر - نق = ۰ دفعہ ۲۴

ع = نق جم (۵-۵) دفعہ ۲۸

اوق جم ر + ب نق جب ر + س = ۰ دفعہ ۲۹

ر = مستقل کے دفعہ ۳۰

امثلہ
خطوط مستقیم کچھ جو ذیل کی مساواتوں کو تعبیر کریں

(۱) $۲ + ۵ = ۷$ (۲) $۲ - ۵ = -۳$ (۳) $۷ = ۲ + ۵$

(۴) $۷ - ۲ = ۵$ (۵) $۵ = ۷ - ۲$ (۶) $۱ = ۱$ جم (ر - ک)

(۷) $۱ = ۱$ (۸) $۱ = ۱$ (۹) $۰ = ۰$ (۱۰) $۱ = ۱$

باب سوم
سوالات خط مستقیم کے

(۳۲) بعض سوالات ر کو دفعات مذکورہ بالا سے حل کرتے ہیں
مساوات خط مستقیم کی جو ایک نقطہ معلوم پر گزرتا ہو دریافت کرو
فرض کرو کہ لہ اور م محدودین نقطہ معلوم کے ہیں اور فرض کرو کہ

$۵ = م + لہ$ س (۱)

خط کو تعبیر کرتا ہی - چونکہ نقطہ (لہ اور م) خط پر ہیں تو اس کی محدودین مساوات
(۱) کی شرائط کو پورا کرتی ہیں اسے معلوم ہوا کہ

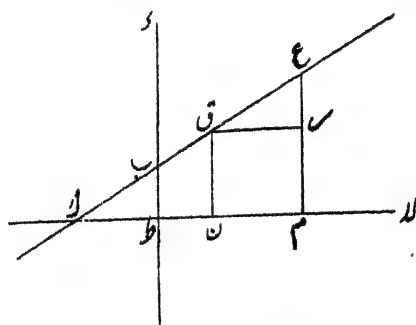
$۵ = م + لہ$ س (۲)

تفریق کرنے سے $۵ - ۵ = م - لہ$ (لہ - لہ) (۳)

یہ مساوات مطلوب ہے

(۳۳) دفعہ بالا میں مساوات (۳) ہمارے مطلب کو تعبیر کرتی ہے یعنی ایک خط مستقیم
جو ایک نقطہ معلوم (لہ اور م) پر گزرتا ہے - اس واسطے کہ مساوات درجہ اول کی ہے
اور اس میں لہ اور م تعبیر ہیں اس لیے بموجب دفعہ ۶ کے ضروری ہے کہ کسی ایک خط مستقیم کو

کو تعبیر کر لیں اور ظاہر مساوات کی شرائط ان قیمتوں $لد = لد$ اور $س = س$ سے پوری ہوتی ہیں
یعنی خط مساوات سے تعبیر ہوتا ہے ضرور ایک خاص نقطہ پر گذرتا ہے۔ مقدار مستقل
مماس اس زاویہ کا ہی جو خط کہ محور $لد$ سے بناتا ہے پس $م$ کی قیمت مناسب حال قرار
کرنے سے مساوات (۳) ہر خط مستقیم کی ہو جائیگی نقطہ معینہ پر گذرتا ہے



مساوات (۳) کے معنی یہ ہیں اس واسطے کہ فرض کرو $ا$ کو $ی$ خط مستقیم ہو جو نقطہ معلوم قیام
گذرتا ہے اور $ع$ اور کوئی نقطہ خط میں ہے اور اسکے محدودین $لد$ اور $س$ ہیں۔ معین $ع$ $م$
اور $ق$ بناتا اور $ق$ $س$ متوازی $ط$ $لد$ کے کچھ تو

$$\frac{ع}{ق} = \frac{م}{س} = \text{مماس } ع ق ر$$

$$\text{یعنی } \frac{لد}{لد} = \frac{س}{س} = \frac{ب}{ا} = \frac{م}{م}$$

اور یہ مساوات (۳) کے مطابق ہے

(۳۴) ہم نے دفعہ ۳۲ میں $س$ کو مساوات (۱) اور (۲) کے درمیان سے ساقط کیا ہے
اور $م$ کو ہم نے برقرار رکھا ہے اگر ہم چاہیں تو $م$ کو ساقط کریں اور $س$ کو برقرار رکھیں ان (۲)

$$م = \frac{س - ا}{لد}$$

اس کو مساوات (۱) میں داخل کر دو تو

$$س = \frac{س - ا}{لد} + لد$$

$$\therefore س - لد = س (لد - ا) = ۰$$

باب سوم
۲۵
سوالات خط استقیم کے
یہ مساوات ظاہر ایک خط استقیم کو تعبیر کرتی ہیں جو نقطہ معلوم میں گزرتا ہے اور سطح کو وہ مساوات
درجہ اول کی ہیں اور قیمتوں لا = لام اور د = دے اور سطح شرط پوری ہوتی ہیں
(۳۵) مساوات اوس خط کی دریافت کرو جو دو نقاط معلوم میں گزرتا ہے
فرض کرو کہ لام اور د ایک نقطہ معلوم کی اور لام اور دے دوسرا نقطہ معلوم کے محدود ہیں
اور فرض کرو کہ مساوات خط استقیم کی یہ ہو کہ

$$د = م + لا + س \quad (۱)$$

چونکہ خط (لا و د) و (لام و دے) میں گزرتا ہے

$$د = م + لا + س \quad (۲)$$

$$د = م + لام + س \quad (۳)$$

مساوات (۱) کو (۲) میں سے تفریق کرنے سے

$$د - د = م - م + (لا - لام) \quad (۴)$$

مساوات (۲) کو مساوات (۳) میں سے تفریق کرنے سے

$$د - د = م - م + (لا - لام) \quad (۵)$$

$$\frac{د - د}{لا - لام} = \frac{م - م}{لا - لام}$$

م کی قیمت کو مساوات (۴) میں داخل کرو تو

$$د - د = م - م + (لا - لام) \quad (۵)$$

ہم اس مساوات کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں کہ

$$(لا - لام) (د - د) = (م - م) (لا - لام) \quad (۶)$$

بعض خاص صورتیں یہی بیان بیان کرنی ضرور ہیں۔ فرض کرو کہ د = م تو مساوات

$$(۶) \text{ یہ ہو جائیگی کہ } (لا - لام) (د - د) = (م - م) (لا - لام) \text{ اس سے } د = م \text{ پس خط مطلوب متوازی}$$

محور لگا ہوگا علیٰ ہذا التعمیل اگر لام = لا تو (۶) کی یہ صورت ہوگی کہ (د - م) (لا - لام) = ۰

اسی طرح لا = لام تو خط مطلوب متوازی محور کا ہوا۔ اب اگر ہم فرض کرو کہ نقطہ (لام و دے)

مبدی ہو تو لا = ۰ اور د = ۰۔ نو مساوات (۶) کی یہ صورت ہوگی کہ

طالعہ علم شکلیہ پر رسم کر کے ان خاص صورتوں کی توضیح اور تشریح کرے

(۳۶) دفعہ ۳۵ کی مساوات (۶) تحویل سے یہ ہو جائیگی کہ

$$لا د = لا د + لا د + لا د + لا د + لا د + لا د = ۰$$

اگر مساوات کی دائیں طرف کو دفعہ ۱۱ کی مساوات (۲) کے اوس جملے سے جو خطوط جدا
کے باقیہ ملائیں تو صرف یہ فرق ہوگا کہ لا اور د بجای لا د اور د کے ہیں پس اس مساوات سے
یہ معلوم ہوگا کہ (لا د و) و (لا د و د) و (لا د و د) میں خطوط ملائے سے رقبہ مثلث کا

فنا ہوتا ہے اور اس حالت میں اس بات کا ہونا بدیہات سی ہی اسلئے کہ اس (لا د و)

قاعدہ پر واقع ہوتا ہے یعنی اوس خط میں جو نقاط (لا د و د) و (لا د و د) میں ملایا جائے

(۳۷) مساوات اوس خط استقیم کی دریافت کرو جو ایک نقطہ معلوم پر گزرتا ہے اور ایک اور

خط استقیم کو جو دو معلوم نقطوں پر گزرتا ہے ایک نسبت معلوم تقسیم کرتا ہے

فرض کرو کہ (ح و ق) نقطہ معلوم اور (لا د و د) و (لا د و د) دو اور نقاط معلوم ہوں

خط خارجہ دو نقطوں میں ملتا ہے وہ نسبت معلوم تقسیم ہوتا ہے اور یہ نسبت معلوم وہ نسبت

ہے جو ان نسبت رکھتی ہیں تو موجب دفعہ ۱۱ کے محدودین نقطہ تقسیم کی یہ ہوگی

$$\frac{لا د + لا د + لا د + لا د + لا د + لا د}{لا د + لا د + لا د + لا د + لا د + لا د}$$

تو دفعہ ۳۵ کی مساوات (۵) کے حکم سے مساوات مطلوب یہ ہوگی

$$\frac{لا د + لا د + لا د + لا د + لا د + لا د}{لا د + لا د + لا د + لا د + لا د + لا د} = ق - ح$$

$$\frac{لا د + لا د + لا د + لا د + لا د + لا د}{لا د + لا د + لا د + لا د + لا د + لا د} = ق - ح$$

$$\frac{لا د + لا د + لا د + لا د + لا د + لا د}{لا د + لا د + لا د + لا د + لا د + لا د} = ق - ح$$

$$\frac{لا د + لا د + لا د + لا د + لا د + لا د}{لا د + لا د + لا د + لا د + لا د + لا د} = ق - ح$$

$$\frac{لا د + لا د + لا د + لا د + لا د + لا د}{لا د + لا د + لا د + لا د + لا د + لا د} = ق - ح$$

(۳۸) مساوات کی صورت اوس خط استقیم کی دریافت کرو جو متوازی ایک معلوم کا ہو

فرض کرو کہ مساوات خط معلوم کی یہ ہے کہ

$$r = m + l \quad (1) \dots \dots \dots$$

$$r = m + l \quad (2) \dots \dots \dots$$

سید
عین
کشتہ

جو کہ خط جو مساوات (۱) سے تعبیر ہو رہی تو وہ محمولہ سی ایک ہی لکھتا

تو (۲) مساوات یہ ہو جاگی کہ

مقدار س کی کہتین نہیں ہو سکتی کیونکہ ایک خط مستقیم معلوم کے شمار خط مستقیم ہوا کرتے ہیں

(۳۹) دو خط مستقیم معلوم کے نقطہ تقاطع کے محدین دریافت کرو

فرض کرو کہ مساوات ایک خط کی یہ ہو کہ

$$r = m + l \quad (1) \dots \dots \dots$$

$$r = m + l \quad (2) \dots \dots \dots$$

تو جس نقطہ پر دو خط مستقیم تقاطع کرتے ہیں اس نقطہ کے محدین چاہے کہ دونوں مساواتوں کی مشترک

پورا کریں اس واسطے کہ جو چاہے کہ قیستیں لاد اور یہ کی مساوات (۱) اور (۲) سے دریافت کریں

$$l = \frac{r - m}{1} \quad \text{اور} \quad r = m + l \quad \text{سے} \quad m = r - l$$

$$m = r - l$$

پس محدین مطلوبہ ہیں

(۴۰) تین خط مستقیم کے ایک نقطہ پر ملنے کے لئے جو بشرط ضرور ہو اس کو دریافت کرو

فرض کرو کہ مساوات تین خط کی یہ ہوں کہ

$$r = m + l \quad (1) \dots \dots \dots$$

$$r = m + l \quad (2) \dots \dots \dots$$

$$r = m + l \quad (3) \dots \dots \dots$$

$$r = m + l \quad (4) \dots \dots \dots$$

(۱) اور (۲) کی خطوط کے نقطہ تقاطع کے محدین یہ ہو گئی

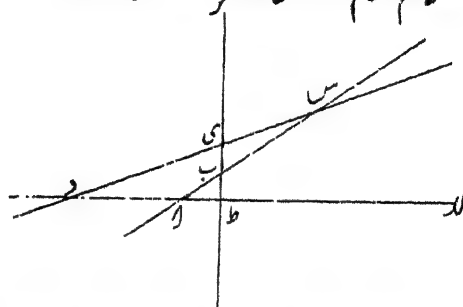
$$l = \frac{r - m}{1} \quad \text{اور} \quad r = m + l \quad \text{سے} \quad m = r - l$$

پس اگر تیسرا خط پہلے اور دوسری کے نقطہ تقاطع پر گزرتے تو یہ قیستیں چاہے کہ مساوات

(۳) کی شرائط کو پورا کریں اسے معلوم ہو کہ ضروری اور کفایتی شرط یہ ہے کہ

$$س_۱ م_۱ - س_۲ م_۲ = ۱۲ \quad ۲ م_۱ - (س_۱ - س_۲) م_۲ + س_۳ = ۰$$

یعنی $س_۱ م_۱ - س_۲ م_۲ + س_۳ م_۲ - س_۳ م_۱ + س_۳ م_۱ - س_۳ م_۲ = ۰$
(۴) دو خطوط مستقیم معلوم کے درمیان کا زاویہ دریافت کرو



فرض کرو اب اس ایک خط ہی اور دوسری خط ہی اور مساوات پہلے خط کی یہ ہے کہ

$$د = م_۱ ل + س_۱$$

اور مساوات دوسرے خط کی یہ ہے کہ

$$د = م_۲ ل + س_۲$$

$$تو م_۱ ل + س_۱ = م_۲ ل + س_۲ \quad (س_۱ ل - س_۲ ل) + (س_۱ - س_۲) = ۰$$

$$\frac{س_۱ ل - س_۲ ل}{س_۱ - س_۲} = \frac{س_۲ - س_۱}{س_۱ - س_۲}$$

$$= \frac{س_۲ - س_۱}{س_۱ - س_۲}$$

$$= \frac{س_۲ - س_۱}{س_۱ - س_۲}$$

اسے ہم مستقیم کرتے ہیں کہ

$$\frac{س_۱ ل - س_۲ ل}{س_۱ - س_۲} = \frac{س_۲ - س_۱}{س_۱ - س_۲}$$

$$\frac{س_۱ ل - س_۲ ل}{س_۱ - س_۲} = \frac{س_۲ - س_۱}{س_۱ - س_۲}$$

$$\frac{س_۱ ل - س_۲ ل}{س_۱ - س_۲} = \frac{س_۲ - س_۱}{س_۱ - س_۲}$$

(۴۲) ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم معلوم پر عمود ہے اس کی مساوات کی صورت دریا کر

$$د = م_۱ ل + س_۱ \quad \text{مساوات خط معلوم کی ہو اور}$$

$$د = م_۲ ل + س_۲ \quad \text{مساوات دوسرے خط کی ہو}$$

تو ماس اس زاویہ کا جو ان خطوں کے درمیان ہے

$$\frac{س_۱ ل - س_۲ ل}{س_۱ - س_۲} = \frac{س_۲ - س_۱}{س_۱ - س_۲}$$

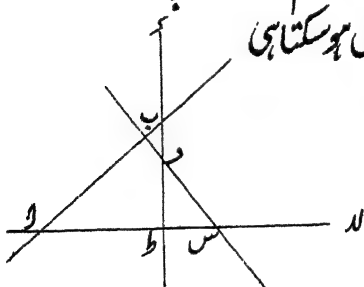
اگر یہ خط عمود ہیں تو $1 + م = م$ ۔

$$م = 1$$

اسے معلوم ہوا کہ $د = 1$ ۔ $1 + م = م$
یہ مساوات ایک عمود کو تعبیر کرتی ہے جو ایک خط

$$د = م + 1$$

(۴۳) نتیجہ دفعہ گذشتہ اس طرح بھی حاصل ہو سکتا ہے



فرض کرو کہ $د$ خط معلوم ہے تو $س = 1$ ۔ $م$ اور $د$ فرض کرو کہ $د$ عمود $د$ پر ہے تو

$$س = د + 1$$

$$م = 1$$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات $س = د + 1$ کی ہی ہے کہ

$$د = 1 + م$$

$$س = د + 1$$

(۴۴) مساوات ایک خط مستقیم کی دریافت کرو جو ایک نقطہ پر گزرتا ہے اور عمود ایک خط معلوم پر ہے

فرض کرو کہ $د$ عمود $د$ پر ہے اور $د$ خط معلوم کے ہیں اور

$$د = م + 1$$

مساوات خط معلوم کی ہے۔ صورت مساوات خط کی جو ایک نقطہ (د) پر گزرتا ہے

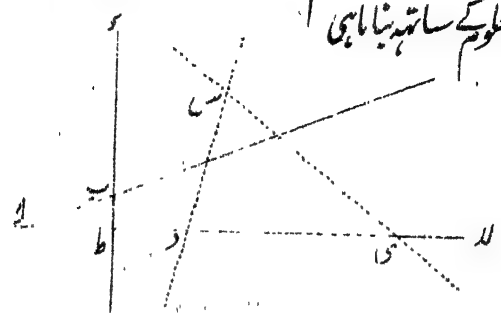
$$د = 1 + م$$

اگر (۲) عمود (۱) پر ہو تو

اسے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوب یہ ہے

$$د = 1 + م$$

باب سوم
(۴۵) مساوات ایک خط مستقیم کی دیات کرو جو ایک نقطہ پر گزرتا ہو اور ایک زاویہ معلوم
ایک خط مستقیم کے ساتھ بنایا ہو



فرض کرو اب خط مستقیم معلوم ہی اور سن نقطہ معلوم اوج اور ق اس کے محدین اور بن معلوم
فرض کرو کہ مساوات اب کی $د = م + لد + س$ ہی فرض کرو کہ س دا اور س ہی دو خط ہیں
س سے کچھ گئے ہیں اور زاویہ معلوم ب خط اب کے ساتھ بناتے ہیں تو
س س د لد = س س (ب ا لد + د ب)

$$\frac{م + س د}{ا - م س د} =$$

$$س س ی لد = س س ی لا = س س (ب - ا لد)$$

$$\frac{م - س د}{ا + م س د} =$$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات س د کی یہ ہے کہ
 $د - ق = \frac{م - س د}{ا - م س د}$ (لد س) مساوات س ی

(۴۶) خاص صورتیں نتائج بالذکر کی ذیل میں لکھی جاتی ہیں

(۱) فرض کرو کہ $م =$ تو خط معلوم تنوازی محور لد کا ہوگا۔ تو مساوات میں مطلوب یہ ہوگا

$$د - ق = س د (لد س)$$

$$د - ق = س د (لد س)$$

(۲) فرض کرو کہ $م = \infty$ تو خط معلوم تنوازی محور د کا ہوگا اور چونکہ

$$\frac{م + س د}{ا - م س د} =$$

$$س د ب م = \infty \text{ تو } \frac{ا}{م} = 0 \text{ مساوات میں لکھے ہوئے ہوگا}$$

$$د - ق = س د (لد س) = د م ب (لد س)$$

(۴۵) مساوات ایک خط مستقیم کی دیات کرو جو ایک نقطہ پر گزرتا ہو اور ایک زاویہ معلوم ایک خط مستقیم کے ساتھ بنایا ہو

اور علیٰ نذرانہ سواوات سی یہ ہوگی

(۳) فرض کرو کہ م = مس با اس صورت میں سواوات سی د کی یہ ہوگی

$$د - ق = م = \frac{مس با}{اس با} \quad (لد - ج)$$

یعنی د ق = مس با (لد - ج)

اور سواوات سی کی یہ ہو جائیگی

پس سی متوازی محور لگا ہے

(۴) فرض کرو کہ م = مم با تو سواوات سی د کی اس صورت میں لکھی جائیگی

$$د - ق = (م - مم با) = (م + مس با) \quad (لد - ج)$$

اور ہم دیکھتے ہیں کہ جب م = مم با تو بائیں طرف برابر منفر کے ہو جائیگی پس سواوات مطلوب یہ ہوگی

تو سواوات سی کی یہ ہو جائیگی

$$د - ق = م - مم با \quad (لد - ج)$$

$$= م با - مم با \quad (لد - ج)$$

(۵) فرض کرو کہ م = مس با تو سواوات سی د کی یہ ہو جائیگی

$$د - ق = م = \frac{مس با}{اس با} \quad (لد - ج)$$

$$= مس با \quad (لد - ج)$$

(۶) فرض کرو کہ م = مم با تو سواوات سی د کی یہ ہو جائیگی کہ

$$د - ق = م - مم با \quad (لد - ج)$$

$$= م با \quad (لد - ج)$$

اور سواوات سی کی اس صورت میں لکھی جائیگی

$$د - ق = (م + مم با) = (م - مس با) \quad (لد - ج)$$

اور ہم دیکھتے ہیں کہ جب م = مم با تو بائیں طرف برابر منفر کے ہو جائیگا تو سواوات مطلوب یہ ہوگی

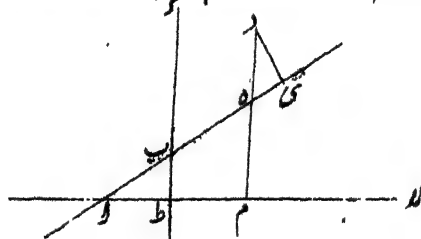
(۴) فرض کرو کہ ب = کہے تو مساوات س د اس طرح لکھ سکتی ہیں

$$س - ق = م + ب \quad (لد - ح)$$

جب ب = کہے تو م ب = . تو مساوات یہ ہو جائیگی کہ

$$س - ق = م + ب \quad (لد - ح)$$

اور علیٰ ہذا القیاس مساوات س ی کی صورت ہی اور یہ نتیجہ مطابق نتیجہ دفعہ ۴۴ کے ہی ہے جسے جو خاص صورتیں یہ لکھی ہیں اسے مطلب ہمارا یہ ہے کہ طالب علم اس بات کا امتحان کر لے کہ وہ اصول علم کو اچھی طرح سمجھتا ہی یا نہیں اور صور عام سے جو مخصوص مسئلہ کر سکتا ہی یا نہیں اس کے لئے یہ امر بجا آئے ہو گا اگر وہ موافق ان صورتوں کے شکلیں قسّم کر کے اونکے تشریح کرے (۴۴) ایک نقطہ معلوم سے جو خط مستقیم معلوم پر عمود نکالے گا اس کا طول دریافت کرو



فرض کرو کہ اب خط مستقیم معلوم ہے اور نقطہ معلوم اور اس کے ج اور ق محدود ہیں اور

$$س = م + لد + س \quad (۱)$$

تو مساوات خط کی جو نقطہ د سے گزرے اور عمود اب پر ہو موجب دفعہ ۴۴ کے یہ ہوگی

$$س - ق = م + ب \quad (لد - ح) \quad (۲)$$

فرض کرو کہ لد اور د محدودین نقطہ ی کی ہیں تو موجب دفعہ ۴ کے

$$دق = (لد - ح) + (س - ق) \quad (۳)$$

اب یہ باقی رہا کہ لد اور د کی جگہ اونکی قیمتیں (۳) میں داخل کریں اب چونکہ

لد اور د محدودین نقطہ ی کی ہیں یہ وہ نقطہ جی سپر (۱) اور (۲) ملتے ہیں تو

$$س = م + لد + س اور م - ق = م - (لد - ح)$$

$$\therefore \text{م ل ا} + \text{س} = \text{ق} - \frac{\text{م}}{\text{م} + 1} \text{ (م ل ا ح)}$$

$$\therefore \text{م ل ا} = \text{م ق} + \frac{\text{ق}}{\text{م} + 1} - \text{م س}$$

$$\text{اور ل ا} - \text{خ} = \text{م ق} - \frac{\text{م}}{\text{م} + 1} - \text{م س}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{م} + 1} (\text{ن} - \text{م} - \text{ح} - \text{س})$$

$$\text{اور نیز م} = \text{م ل ا} + \text{س} = \frac{\text{م ق} + \text{ق} + \text{م س} + \text{س}}{\text{م} + 1}$$

$$\text{اور م} - \text{ق} = \frac{\text{م} + \text{ق} + \text{س} - \text{ق}}{\text{م} + 1}$$

$$\therefore \text{م ل ا} - \text{ق} = \frac{\text{م}}{\text{م} + 1} (\text{ق} - \text{م} - \text{ح} - \text{س}) + \frac{\text{ق} - \text{م} - \text{ح} - \text{س}}{\text{م} + 1}$$

$$\text{اسے معلوم ہوا دی} = \frac{\text{ق} - \text{م} - \text{ح}}{\text{م} + 1}$$

علامت نسب نامہ وہ لینی چاہئے جسے دی کی قیمت مثبت رہی ہے اگر شمار کنندہ مثبت ہو تو نسبت
بھی مثبت علامت جذر کی لینی چاہئے اور اگر منفی ہو تو منفی
اور ہم قیمت دی کی اس طرح بھی حاصل کر سکتے کہ دم معین کیجے جو اب سے نقطہ ہر پڑے تو

$$\text{دی} = \text{دھ جب دھ دی} = \text{دھ جم دھ ل م}$$

$$\text{اب ط م} = \text{ح} = \text{دھ م} = \text{م ح} + \text{س} \text{ اور دم} = \text{ق}$$

$$\therefore \text{دھ} = \text{ق} - \text{م} - \text{ح} - \text{س}$$

$$\text{اور نیز م} = \text{م} = \text{جم دھ ل م} = \frac{\text{م}}{\text{م} + 1}$$

$$\therefore \text{دی} = \frac{\text{ق} - \text{م} - \text{ح} - \text{س}}{\text{م} + 1}$$

اسے معلوم ہوا کہ اگر خط م ل ا س = پیمود نقطہ (ح وق) سے نکالا جائے اور ایک
عمود بھی نقطہ (ح وق) سے تو نسبت پہلے عمود کی دوسرے عمود کے ساتھ ایسی ہوگی

جیسے نسبت تعداد ق - م ح - س کو ہی ق م - م ح - س سے
(۴۸) ایک خط کا طول دریافت کرو جو ایک نقطہ معلوم سے پہنچا جائے اور سمت معلوم

میں ایک خط معلوم ہے

باب سوم

۳۴

سوالات خط مستقیم

فرض کرو کہ (ح وق) نقطہ معلوم ہے اور فرض کرو کہ ایک خط نقطہ معلوم سے گزرتا ہو اور محور لہ کے ساتھ زاویہ گہ پر اکاٹل ہو اور اس خط

(۱) سے

$$ل + د + ب + س = ۰$$

فرض کرو کہ ق طول مطلوب ہے اور لہ اور د متحد ہیں اور نقطہ کے میں جہاں خط (ح وق) سے گزرتا ہے (۱) سے ملتا ہے تو بموجب دفعہ ۲ کے

$$ل - ح = م + ج م گہ اور د - ق = ق جب گہ (۲)$$

نقطہ (لہ د م) (۱) پر ہی

$$\therefore (ح + م + ج م گہ) + ب (ق + م + ج م گہ) + س = ۰$$

$$: م = \frac{ل + د + ب + ق + س}{م + ج م گہ + ب جب گہ}$$

(۳۹) اس باب میں ہم مساوات میں اس صورت کو کہ د = م + لہ + س کام میں لائی ہے طالب علم کو چاہیے کہ وہ اور قرینہ دار مساواتیں خط مستقیم کی کام میں لے اور اسے سوالات حل کرے اور قرینہ دار صورتیں یہ ہیں کہ

$$ل + د + ب + س = ۰$$

$$ل + س + ج - ا = ۰$$

$$ل + ج + د + ب + س = ۰$$

جو نتائج حاصل ہو گئی ان کا مقابلہ آسانی سے اون نتائج کے ساتھ ہو سکتا ہے جو حاصل ہو چکی ہیں۔ شگافہ ۲ میں ہم خط معلوم کو اس مساوات سے تعبیر کرتے ہیں کہ

$$ل + د + ب + س = ۰$$

تو نتیجہ جو حاصل ہو گا وہ مطابق اس قیمت کے ہو گا کہ

$$ق - م - ح - س$$

جب بجای م کی ہم - لے اور س کے بجای - لے لکھیں تو جا پئے یہ نتیجہ حاصل ہو گا کہ

$$ل + د + ب + ق + س$$

$$(۱ + م + د)$$

اور علیٰ ہذا القیاس اگر خط معلوم اس مساوات سے تعبیر ہو کہ

لاحجم $ه + ح$ جب $ه - ع = ۰$ ۔
تو یکو دریافت ہوگا کہ عمود جو اوکسیر (ح ذوق) سے نکالا جائے

$±$ (ح جم $ه + ح$ جب $ه - ع$) ہوگا
تو طول عمود کا جو نقطہ سے اس خط پر کھینچا جائے برابر عددی قیمت اس جملہ کے ہوگا جو دائیں طرف
مسوات کے او سو ق پیدا ہو کہ لا اور کسی جگہ نقطہ معلوم کی محدودین کہیں۔ یہ ایک بڑا نتیجہ ہی
اس لئے ہم اس کا امتحان نہایت دقیق و تحقیق کے ساتھ کریں گے

(۵۰) اگر مسوات خط کی کسی صورت میں معلوم ہو تو ہم اس کو سطح فوراً بدل سکتے ہیں کہ اس کی
رقعین اس عمود کے طول میں جو مسدود سے نکالا جائے اور اس میلان میں جو اس عمود کا
سحر لڈ کے ساتھ ہو بیان کیجائیں۔ مثلاً فرض کرو کہ مسوات یہ ہے کہ

اس طرح علامتیں تبدیل کرو کہ آخر رقم کی علامت منفی ہو جائے تو مسوات کی یہ صورت ہوگی کہ
لاحجم $ه + ح$ جب $ه - ع = ۰$ ۔
۲ لڈ - ۳ - ۴ = ۰

اور $(۲ + ۳)$ پر تقسیم کر دو تو
$$۰ = \frac{۲}{۱۳} - \frac{۳}{۱۳} - \frac{۴}{۱۳}$$

اور یہ اس صورت کی ہے کہ

لاحجم $ه + ح$ جب $ه - ع = ۰$ ۔

اور جم $ه = -$ اور جب $ه = -$ اور $ع = \frac{۲}{۱۳}$

اس میں $ه$ ایسا زاویہ ہے جو درمیان ک اور $ع$ کے واقع ہے

کوئی اور مثال یہی اسے ترکیب کے حل ہو سکتی ہے قاعدہ یہ ہے کہ

سب رقموں کو ایک طرف جمع کرو اور اگر ضرورت ہو تو علامتیں اس طرح بدل دو کہ آخر رقم کی

علامت منفی ہو جائے غرض مسوات اس صورت کی بنجائی کہ لڈ + ب - ۳ = ۰۔ جسمیں

مستقیم ہے اور یہ (۱ + ب) پر تقسیم کر دو تو مسوات یہ ہو جائیگی کہ

۱ لڈ + (۱ + ب) + (۱ + ب) - (۱ + ب) = ۰
یہ صورت مطلوبہ مسوات کی ہے اور

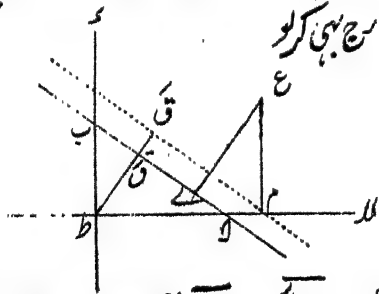
پس اس طرح ہر اوائی جو ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے اس صورت میں آن سکتی ہے کہ

$$\text{لاحم} = \text{ح} + \text{ح} = \text{ع} = 0$$

اسمین ع ثبوت متعارف بشرطیکہ خط مبدا زمین نہ گذرتا ہوا وساحت مین ع = ۰ کے ہو جا لگا
جب ہم اس مساوات کو کام مین لاتے مین کہ
لاجم ہ + وجب ہ = ع = ۰
(۱) خط جسکی مساوات یہ ہے ہم ہمیشہ ع کو ثبوت فرض کرتے ہیں

اور مساوات کا اختصار اس طرح لکھی جاتی ہے کہ $h = 0$ ۔

اب ہم ایک اور طرح سے تحقیقات اوس نمود کی جملہ کی کرنگی جو نقطہ معلوم سے خط (ع دھ) پر گذرتا فرض کرو کہ اب خط (ع دھ) کو تعبیر کرتا ہی اور طے بدری اور نقطہ (لد ای) ایسا ہی کہ ع اور ط مقابل سمتوں میں اب کے واقع ہیں طاق اور ع نمود اب پر نکالو اور ع م متوازی ط کا نکالو اور نقطہ م سے خط متوازی اب کا نکالو جو طاق اور ع سے ق اور بی پر ملے اور اگر ضرورت پڑے تو ع سے کو خاص ج بھی کرلو



تَوَاقُّقٌ = طَامٌ مَحْمُودٌ = لَدَجْمٌ هَ اور عَے = عَمَّ حَبِہ = حَبِہ

عط = طق + عے - طق = لاجم ھ + حیب ھ - ع
اگر ع اور ط ایک ہی جانب میں اب کے واقع ہوں تو عمود کی واسطے یہ حال ہوگا

یہی نتائج تمام اختلافات میں حاصل ہوتے ہیں۔

سوالات خط مستقیم کے

باب سوم (۵۲) آیا اس طریقہ سے اس مطلب کو حاصل کرتے ہیں

فرض کرو کہ لاجم $هه + رجب هه - ع = ۰$

یہ مساوات ایک خط مستقیم کی ہی اولاد و سرحدین اوس نقطہ کے ہیں جسے عمود نکالاجا۔ اب مطلب یہ ہے کہ طول عمود کا دریافت کیا جا

مساوات کسی خط کی جو متوازی (۱) کا ہو اور سب سے اوس جانب میں واقع ہو جس جانب میں خط واقع ہے

لاجم $هه + رجب هه - ع = ۰$ (۲)

اس میں $ع$ عمود ہی جو مبدی اسی اس خط پر نکالاجا۔ اگر یہ خط نقطہ (لدو) پر گزری ہو تو یہ اصل ہوگا کہ

لاجم $هه + رجب هه - ع = ۰$

$ع = لاجم هه + رجب هه$

اور طول عمود کا جو (لدو) سے (۱) پر نکالاجا $ع$ ہوگا اگر نقطہ اور سب سے خط کی مخالف جانب میں واقع ہیں اور $ع - لاجم هه + رجب هه - ع$ ہوگا اگر وہ دونوں خط کی ایک جانب میں واقع ہوں یعنی

لاجم $هه + رجب هه - ع$ صورت اول میں اور

$ع - لاجم هه - رجب هه$ صورت دوم میں

اگر خط متوازی (۱) کا مبدی کی مخالف جانب میں واقع ہو تو مساوات یہ ہوگی کہ

لاجم $(ک + هه) + رجب (ک + هه) - ع = ۰$

اس میں $ع$ طول عمود کا ہی جو مبدی اسی اوس پر نکالاجا۔ اگر یہ خط نقطہ (لدو) پر گزری ہو تو یہ اصل ہوگا کہ

لاجم $هه + رجب هه + ع = ۰$

$ع = - لاجم هه - رجب هه$

اور طول عمود کا (لدو) سے (۱) پر مجموعہ $ع$ اور $ع$ کا ہوگا یعنی

$ع - لاجم هه - رجب هه$

اگر ہم زبر کو ارا دین تو وہی نتیجہ حاصل ہوگا جو سابق میں حاصل ہوا تھا

(۳) پس عمود نقطہ (لدو) سے خط

لاجم $هه + رجب هه - ع = ۰$ پر

اگر نقطہ (لاؤ) اور سیدہ مختلف جانوں میں خط کی واقع ہوگی لاجم $\text{ھه} + \text{ھه}$ جب ھه سے ہی
 اور اگر دونوں ایک ہی جانب میں سیدہ کی واقع ہیں تو وہ $\text{ع} - \text{ھه}$ لاجم $\text{ھه} - \text{ھه}$ جب ھه ہی
 طالب علم کی دل میں یہ خیال پیدا ہوگا کہ یہ کیا بات ہے کہ جان نقطہ کا ذکر ہی وٹان ہی رموز لا
 اور بیان ہوتی ہیں اور جہاں خط کا بیان ہی وٹان ہی رموز لا اور بیان ہوتی ہیں
 لیکن یہاں نقطہ (لاؤ) کہنے سے مطلب یہ نہیں ہے کہ وہ نقطہ خط پر ہی یعنی ہماری مراد یہ نہیں ہے کہ
 اور جو محدثین نقطہ (لاؤ) کے ہیں وہی قیمت رکھتی ہیں جو خط لاجم $\text{ھه} + \text{ھه}$ جب ھه سے کسی نقطہ پر
 قیمت رکھتے ہیں تاکہ یہ غلط فہمی نہ پڑے اسلئے ہمو لاؤ اور محدثین نقطہ کام میں لا جائے لیکن جو طریقہ اس کے
 تحریر کا ذکر ہوا ہے اس میں آسانی بہت ہی اور اس آسانی سے نسبت اس میں غلط فہمیاں زیادہ فائدہ
 طالب علم کو توجہ اس بات پر کرنی چاہئے کہ ان رموز کے مختلف معنی لئے گئے ہیں
 (۵۴) دفعہ ۱۴ میں اس بات کو طالب علم پر چھوڑ دیا ہے کہ وہ مختلف سطہیں مرتب کر کے اس بات کا
 کر کے کہ عمود نقطہ (لاؤ) سے خط (ع وھه) پر
 \pm (لاجم $\text{ھه} + \text{ھه}$ جب $\text{ھه} - \text{ھه}$) ہوگا
 اور سیدہ مختلف جانوں میں خط (ع وھه) کے واقع ہونے کی علامت اور
 جب ایک جانب میں واقع ہوں تو نجی کی علامت کام میں لانی چاہئے۔ اس طرح سے جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے تمام
 رہتا ہے۔ دفعہ ۱۴ کی طرح ہم اولیٰ یہ ثابت کرینگے کہ عمود ہمیشہ ان جملوں
 \pm (لاجم $\text{ھه} + \text{ھه}$ جب $\text{ھه} - \text{ھه}$) میں سے کسی ایک کی برابر ہوگا
 اور یہ اس کی صورتوں میں باہم تیز کرینگے۔ اب جملہ لاجم $\text{ھه} + \text{ھه}$ جب ھه سے منفی ہے نقطہ
 (لاؤ) سیدہ ہو کیونکہ وہ اس حالت میں برابر ع کے ہوتا ہے اور نیز یہ جملہ علامت نہیں بدل سکتا
 جب تک کہ (لاؤ) خط (ع وھه) کی اسی جانب میں واقع ہی جس جانب میں سیدہ ہی اسلئے کہ وہ
 قیمت نہیں بدل سکتا جب تک اس کی قیمت کی نسبت صفر پر نہ پہنچے اور وہ صفر یعنی معدوم نہیں
 ہو سکتا جب تک نقطہ (لاؤ) خط پر ہے۔ اسے معلوم ہوا کہ جملہ منفی رہتا ہے جب تک نقطہ (لاؤ)
 اسی جانب میں خط (ع وھه) کے ہو جس جانب میں کہ سیدہ ہی علیٰ ہذا القیاس جملہ مثبت ہوگا
 جب نقطہ (لاؤ) کا مقام دوسری جانب میں خط (ع وھه) کے واقع ہی اور وہ آسانی سے

ثابت ہو سکتا ہے کہ لاد کے مناسب قیمتوں مقرر کرنے سے جملہ مثبت ہوتا ہے۔ اسے معلوم ہوا کہ وہ ہمیشہ مثبت ہی اگر (لاد) اور سید و مخالف جانوں میں واقع ہوں۔ اس ترکیب کو ہم ناقص اس کے کہتے ہیں کہ فقرہ جو خط عرضی کے نیچے ہی وہ ایک ایسی بات ہے کہ اس پر ایک علم کی توجہ کی توجہ اتنا کہ ایسی نہیں ہو سکتی کہ وہ اس کا یقین کامل کرے

(۵) اگر مساوات خط کی لاجم $ھ + جب ھ = جسمیں ھ =$ کے ہو گیا ہو تو باوجود اس بات کہ پہری یہ جملہ \pm (لاجم $ھ + جب ھ$) طول عمود کا ہوگا جو نقطہ (لاد) سے اس پر نکلا جائے اب ہم بیان اس بات کو اس طرح ہی بیان کرتے ہیں کہ مساوات کو اس طرح لکھتے ہیں کہ امثال کے مثبت ہوں تو ان نقاط کی واسطی جو ایک ہی جانب میں خط کی محور کے مثبت حصہ کی طرف واقع ہوں اس سے عمود لاجم $ھ + جب ھ$ ہوگا اور ان نقطوں کے واسطی جو دوسری جانب میں واقع ہوں عمود $۔ (لاجم ھ + جب ھ)$ ہوگا۔ اگر چند شکلوں کا اہم مقابلہ کریں تو یہ بات آسانی سے نتیجہ میں آجائے گی

یاد دفعہ ۴۲ کی طرح اس بات کو سمجھو

غیر قائم الزاویہ یعنی محور یا محور

(۵۶) جو نتائج دفعات ۳۲ سے ۴۰ تک بیان ہوئے ہیں وہ دونوں صورتوں میں ثابت ہیں خواہ محور قائم ہوں یا محور لیکن دفعہ ۳۳ میں م کی معنی موافق محور یا محور کے لیے چاہئے زاویہ درمیانی دو خطوط مستقیم کا دریافت کرو جب محور محور ہوں

فرض کرو کہ زاویہ محوروں کے درمیان ہو اور $م + لاد$ مساوات ایک خط کی ہو کے $م + لاد$ مساوات دوسرے خط کی ہو اور $ھ + لاد$ زاویہ ہوں جو یہ خطوط محور کے ساتھ بناتے ہیں اور ب اوٹکا درمیانی زاویہ ہو تو جو جب دفعہ ۴۲ کے

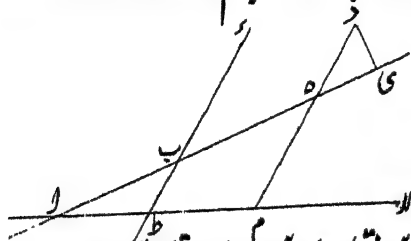
$$مس ھ = \frac{م + لاد}{م + لاد} \text{ اور } مس ھ = \frac{م + لاد}{م + لاد}$$

$$\frac{م + لاد}{م + لاد} - \frac{م + لاد}{م + لاد} = (ھ - ھ) = ۰$$

$$\begin{aligned} &+ ۱ + (م + لاد) + (م + لاد) + (م + لاد) \\ &= (م + لاد) + (م + لاد) + (م + لاد) + (م + لاد) \end{aligned}$$

باب سوم
اسے معلوم ہوا کہ خطوط ایک دوسرے پر زاویے قائم بنائیں اسکے واسطے یہ شرط ضرور ہے کہ
 $0 = (۱۲ + ۱۲) \text{ جم} + ۱۲۱۲۱۲$

(۵) طول عمود کا دریافت کرو جو ایک نقطہ معلوم سے ایک خط مستقیم پر نکلا جا
بیان ہم کو دفعہ ۱۲ کی طرح عمل کرنا چاہیے اور طالع علم کا مطلب اوس ترکیب سے کہ آغاز دفعہ ۱۲ میں قیوم
حاصل ہو جائیگا



فرض کرو کہ اب خط مستقیم معلوم ہے نقطہ معلوم اور (ح د ق) متحدہ ہیں
فرض کرو کہ مساوات اب کی ہے

$س = م + لا + س$
متوازی طو کا نکالو اور دسی عمود اب پر نکالو تو
دسی = دھ جب دھ سی

اب دھ = دم - دھم = ق - (م + ح + س) = ق - م - ح - س
اور فرض کرو کہ ب لا = دھ تو دھ سی یا لا دھ م = د - دھ
اور $\frac{ح + دھ}{(د - دھ)} = م$ موجب دفعہ ۱۲ کے

یا جب (د - دھ) = $\frac{ح + دھ}{(د - دھ)} = م$ حساب
۱۲ دفعہ $\frac{م}{(ق - م - ح - س)} = دسی$

اگر ایک نقطہ د سے اب پر زاویہ ب بنائی کو اوس کا دسی قیوم ہوگا
اور چونکہ دسی معلوم ہے اسلئے وہ بھی معلوم ہو جائیگا
اگر مساوات خط مستقیم کی دفعہ ۱۲ کی صورت میں یہ ہو کہ

لاجم دھ + دھ - ح = ۰
تو طول عمود کا جو نقطہ (لا و د) سے اوس پر نکلا جائے یہ ہوگا
 $\pm (لاجم دھ + دھ - ح - س)$

باب سوم
اسکا اشتباہ جملہ مذکورہ سے ہو سکتا ہے مادہ ۷۱ کی طور پر معلوم ہو سکتا ہے
مسائل خط مستقیم کے

قطبی محدین

(۵۸) قطبی مساوات اوس خط مستقیم کی دریافت کرو جو دو نقطوں پر گزرتا ہے
فرض کرو کہ نق اور ر ایک نقطہ کے اور نق اور ر دوسرے نقطہ کے محدین ہیں
اور فرض کرو کہ مساوات خط کی یہ ہے کہ

نق جم (ر - ہ) = ع

یعنی نق جم ر جم ہ + نق جب ر جب ہ = ع (۱)

اور چونکہ خط دو نقطوں پر گزرتا ہے تو ہکو یہ حاصل ہوتا ہے

نق جم ر جم ہ + نق جب ر جب ہ = ع (۲)

نق جم ر جم ہ + نق جب ر جب ہ = ع (۳)

(۱) اور (۲) سے

(نق جم ر - نق جم ر) جم ہ + (نق جب ر - نق جب ر) جب ہ = ۰ (۴)

اور (۲) اور (۳) سے

(نق جم ر - نق جم ر) جم ہ + (نق جب ر - نق جب ر) جب ہ = ۰ (۵)

$$\frac{\text{نق جم ر} - \text{نق جم ر}}{\text{نق جم ر} - \text{نق جم ر}} = \frac{\text{نق جب ر} - \text{نق جب ر}}{\text{نق جب ر} - \text{نق جب ر}}$$

اور بعد تبخیر کے ہکو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

نق جب (ر - ہ) + نق جب (ر - ہ) + نق جب (ر - ہ) = ۰ (۶)

اس مساوات کے معنی یہ ہے نہایت آسانی سے سمجھ میں آئے ہیں اسکا کہ اگر ہم شکل کچھیں اور ط

کو مبدا و قرار دین اور (لوب و مع) نقاط (نق اور ر) و (نق اور ر) و (نق اور ر) ہوں

تو ہکو صاف معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۶) جملہ بیانیہ اس امر واقعی کا ہے کہ ایک مثلث مثلثات

طالع اور طابع اور طاب میں سے برابر یا قی دو مثلثوں کے مجموعہ کے ہے

(۵۹) ہم پہلے بیان کر کے ہیں کہ مساوات درجہ اول کا مقام النقاط ایک خط مستقیم ہوتا ہے

اور جب ہم اسے مرتبہ کے طور پر معلوم ہوا کہ اگر مساوات درجہ اول سے ایک درجہ زیادہ ہو تو

اس کے مطابق مقام النقاط ایک خط طعن اکثر ہوتا ہے اب بیان ہم بعض مستثنی صورتیں بیان کرتے ہیں

فرض کرو کہ مساوات یہ ہے کہ $5x^2 - 4x + 3 = 0$

ہر بات اس طرح لکھی جاسکتی ہے کہ $(d-1)z' + z'' = 0$ ۔

تو ہم دیکھتے ہیں کہ حل اس مساوات کا صرف یہی ہے کہ

$\Delta r = 0$ اور $\Delta s = 0$

۶۰

یہ ثابت ہوا کہ مطابق اس مساوات کے مقام النقاط میں صرف ایک نقطہ محور لایز جس کا

مبدأ سے آئے۔ اب یہ فرض کرو کہ مساوات یہ ہو کہ

اس مساوات کو کوئی حقیقی قیمت بشرط مساوات کو سدا نہیں کر سکتی یعنی اس کی کوئی حقیقی

قیمت ہی نہیں اسلئے اسکی مطابق کوئی مقام النقطاں ہی نہیں ہو سکتا اور اکثر اس مطلب کو

یوں ادا کیا کرتے ہیں کہ اس مساوات کا مقام النقاط نامکون ہے۔ اس طرح ایک مساوات کا مقام النقاط

نامکرم یا ایک نقطہ موسکتابی

(۶۰) ہم یہیے لکھتے ہیں کہ مساوات ایک خطِ مستقیم کی ہمیشہ درجہ اول کی ہوتی ہی ایک مساوات

درجہ اول سے زیادہ درجہ کی ایک ایسے مقام النقطہ کو تعبیر کر سکتی ہو جو دو یا زیادہ خطوط تقسیم

شامل ہو کر بنا ہو۔ مثلاً فرض کرو

(1) $\dots = 5 - 7$

(1) $\dots = 5 - 7$

(1) $\dots = 5 - 7$

اگر محدّدوں ایک نقطہ کے، (۲) و (۳) میں سے کسی ایک کا شریط کو قرار گئے ہیں

توساوات (۱) کی شرائط کو کسی پورا کرنگی یعنی ایک نقطہ جو مساوات (۲) کے مقام النقطۃ

میں مندرجہ وہ مساوات (۱) کے مقام النقطہ میں ہی درج ہے اور نقطہ (۳) میں

درج ہوا (۲) میں درج ہے

اسے معلوم ہوا کہ (۱) تغیر و خطوط متقیم کو کرتی ہی جو بد و پرگدزنی میں اور ہر یک زاویہ

۵۴ اور ۵۵ کا محور لاسے بناتے ہیں

(۶۱) مساوات کے اندر تقادیر شیخ میں سے ایک ہی مقدار مضبوط ہو تو وہ ایک سلسلہ مضبوط

جو محروان میں سے کسی ایک کے متوازی ہونے سے کہیں کہیں۔ اگر کوئی مساوات (۵) = ۰

تو اس کے حل کرنے سے ہم ایک سلسلہ لاکھ قیمتوں کا دریافت کریں گے کہ $لا = لا$ یا $لا = لا$ اور ہر ایک قیمت انہیں کے ایک خط کو تعبیر کریں گی جو محور کا متوازی ہو۔ علیٰ القیاس

اگر $ح = (د) = ۰$ تو وہ سلسلہ خطوط کو تعبیر کریں گی جو محور لاکھ متوازی ہوں

مساوات اس صورت کی کہ $ح = (لج) = ۰$ ایک سلسلہ خطوط کو تعبیر کرتی ہیں جو مبدیہ پر گزریں

اسوے کہ مساوات کے حل کرنے سے ہم ایک سلسلہ $لا$ کی قیمتوں کا دریافت کریں گے اور وہ قیمتیں

یہ ہوں گیں کہ $لا = م$ اور $لا = م$ اور ہر ایک ان مساواتوں میں سے ایک خط

کو تعبیر کریں گے جو مبدیہ میں گزرتا ہے۔ اگر مساوات $ح = (لا) = ۰$ یا $ح = (لا) = ۰$

یا $ح = (لا) = ۰$ کوئی حقیقی قیمت نہ رکھتی ہو تو ان کے مطابق مقام النقطہ نامکمل ہوگا

یہ مساوات کہ $لا = لا + لا + لا + لا + لا = لا$

اس صورت میں لکھی جا کہ $لا = (لا) + لا + لا + لا + لا = لا$

چونکہ یہ مساوات درجہ دوم باعتبار $لا$ کے ہے تو ہر مساوات کے دو قیمتیں دریافت ہوں گیں

فرض کرو کہ $لا = م$ اور $لا = م$ اسے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات اکثر دو خطوں کو تعبیر

کریں گی جو مبدیہ میں گزرتی ہیں۔ اگر $لا = م$ اور $لا = م$ نامکمل ہو جائیں گی اور

صرف حل مساوات کا یہ رہ جائیگا کہ $لا = لا$ اور $لا = لا$ یعنی مقام النقطہ ایک نقطہ واحد

یعنی مبدیہ

(۶۲) یہ ظاہر ہے کہ اگر مقام النقطہ مساوات $ح = (لا) = ۰$ کا مبدیہ کی نقطہ پر گزرتا ہو

$لا = لا$ اور $لا = لا$ مساوات کی شرائط کو پورا کریں گی اس لیے ہم فقط ایک نقطہ $لا$ سے مساوات

پر یہ بتلا دیں گے کہ مقام النقطہ مبدیہ پر گزرتا ہے یا نہیں

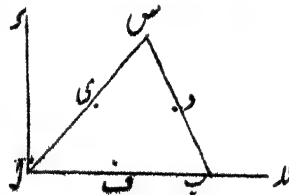
(۶۳) دفعہ ۳۹ میں ہم نے محدودین نقطہ تقاطع دو خط مستقیم دریافت کئے ہیں اس شکل کو

ہم اس طرح شکل عامہ بناتے ہیں فرض کرو کہ $ح = (لا) = ۰$ اور $ح = (لا) = ۰$ کے

دو خطوط متوازی کو تعبیر کرتے ہیں تو محدودین نقطوں کی خبر وہ تقاطع کریں گے ان پر اور اگر

حل کرنے سے متعین ہوں گے۔ یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ایک مساوات $لا$ درجہ

اور دوسری مساوات میں درجہ کی توانکی نقاط مشترک کی تعداد میں سے زیادہ نہیں ہو سکتی (رسالہ مسائل معادلات باب پنجم کو دیکھو)
 (۶۴) جو مسائل اور پرہیز ثابت کئے ہیں انکو خواص مثلث کے ثابت کرنے میں استعمال لیتے ہیں
 - خطوط جو مثلث کے کونوں کے نقطوں سے نقاط وسط اضلاع مقابل میں ملا جائیں تو وہ ایک نقطہ پر ملینگے۔ فرض کرو کہ اب میں مثلث ہی اور دوی دفن نقاط وسط اضلاع کے پس اگر کو مبدا قرار دو اور اب محور لاکھی سمت اور نقطہ اسے ایک عمود اب پر محور رکھ لے نکالو اور فرض کرو کہ اب = ۱ اور لکھ دو کہ محدودین نقطہ میں سے کئے ہیں



چونکہ نقطہ وسط س ب کا ہی تو بموجب دفعہ ۱ کے محدود کا $\frac{1}{2}$ (لکھ + ۱) ہی اور اسکا معین $\frac{1}{2}$ ہی اور چونکہ سی نقطہ وسط اس کا ہی تو محدود نقطہ سی کا $\frac{1}{2}$ ہی اور اسکا معین $\frac{1}{2}$ ہی اور چونکہ ف نقطہ وسط اب کا ہی اسلئے اسکا محدود $\frac{1}{2}$ ہی اور اسکا معین صفر ہے اسلئے معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۵ سے

$$(۱) \dots \dots \frac{1}{2} = 1 \dots \dots \frac{1}{2} = 1$$

$$(۲) \dots \dots \frac{1}{2} = 1 \dots \dots \frac{1}{2} = 1$$

$$(۳) \dots \dots \frac{1}{2} = 1 \dots \dots \frac{1}{2} = 1$$

ہم نقطہ تقاطع (۲) (۳) کے دریافت کرنے کے لئے ہم یہ کہتے ہیں کہ

$$\frac{(1-1/2)}{1-1/2} = \frac{(1-1/2)}{1-1/2}$$

$$\therefore (1-1/2)(1-1/2) = (1-1/2)(1-1/2)$$

$$\therefore (1+1/2) = 1$$

$$\therefore (1+1/2) = 1$$

باب سوم اس قیمت کو مساوات (۲) میں لکھو تو یہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{r}{s} = \frac{r}{s}$$

اس طرح سے ہم نے متحدہ نقطہ تقاطع (۲) اور (۳) کے دریافت کئے اور سو اہم یہ دیکھتے ہیں کہ یہ قیمتیں (۱) کی ہی شرائط کو پورا کرتی ہیں اسے معلوم ہوا کہ جو خط (۱) سے تعبیر ہوتا ہے وہ اون خطوط کے نقطہ تقاطع پر گزرتا ہے جو (۲) اور (۳) سے تعبیر ہوتے ہیں اور اسے عوی ثابت ہے خطوط جو مثلث کے کونوں کے نقاط سے عمود متقابل کے اضلاع پر نکالے جائیں

ایک نقطہ پر ملنے مساوات ب س کی بموجب دفعہ (۳۵) کے

$$\frac{r}{s} = \frac{r}{s} (1 - 1)$$

اسے معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۴۴ کے مساوات خط کی جو نقطہ سے عمود ب س پر نکالے جائے یہ مساوات ہوگی $r = \frac{r}{s} (1 - 1)$ (۴) ہی

اور مساوات اس کی یہ ہے کہ $r = \frac{r}{s}$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات خط کی جو نقطہ سے عمود اس پر نکالے جائے یہ ہے

تو خط جو نقطہ سے اب پر عمود نکالے جائیگا توازی محور دکا ہوگا اور اسکی مساوات بموجب دفعہ ۱۵ کے یہ ہوگی

$$r = \frac{r}{s} (1 - 1) \dots \dots \dots (4)$$

اب نقطہ تقاطع (۵) اور (۴) کے لئے

$$r = \frac{r}{s} (1 - 1) \dots \dots \dots (4)$$

اور ان قیمتوں سے (۴) کی شرائط بھی پوری ہوتی ہیں تو اسے معلوم ہوا کہ خط جو (۴) سے

تعبیر ہوتا ہے وہ نقطہ تقاطع (۵) اور (۴) پر گزرتا ہے

خطوط جو اضلاع کے نقاط وسط سے عمود اضلاع پر نکالے جائیں وہ ایک نقطہ پر ملے ہیں نقطہ جسے جو عمود ب س پر نکالے جائیگا اسکی مساوات یہ ہے کہ

$$د - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (1 - \frac{1}{2}) \dots (۷)$$

نقطہ ی سے جو عمود س ل پر نکالا جائے اس کی مساوات یہ ہوگی

$$د - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (1 - \frac{1}{2}) \dots (۸)$$

نقطہ ف سے جو عمود اب پر نکالا جائے اس کی مساوات یہ ہوگی

$$اب \text{ نقطہ تقاطع } (۸) \text{ اور } (۹) \text{ پر یہ } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ کو حاصل ہوگا} \dots (۹)$$

$$لا = \frac{1}{2} \text{ اور } د = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = (1 - \frac{1}{2})$$

ان سے شرائط مساوات (۷) بھی پوری ہوتی ہیں اسے معلوم ہوا کہ (۷) و (۸) و (۹) جن خطوط ن کو تعبیر کرتے ہیں ایک نقطہ پر ملے ہیں

فرض کرو کہ اول شکل میں تیوں خط نقطہ پر ملے ہیں اور دوسرے شکل میں تیوں خط نقطہ پر ملے ہیں تیسری شکل میں تیوں خط نقطہ پر ملے ہیں یہ ثابت کریں گے کہ اور ق اور ایک خط مستقیم ہیں ہونے کے بعد یہ نقطہ ع کے لا = $\frac{1}{2}$ (لا + ۱) اور د = $\frac{1}{2}$

$$\text{اور نقطہ ق کے } لا = لا \text{ اور } د = \frac{1}{2} - (1 - لا)$$

$$\text{اور نقطہ ر کے } لا = لا \text{ اور } د = \frac{1}{2} - (1 - لا)$$

اسے معلوم ہوا کہ جو خط نقطہ ع اور ق پر گزرتا ہے اس کی مساوات یہ ہے

$$د - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (1 - لا) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (1 - لا) \dots (۱۰)$$

اس مساوات میں لا = $\frac{1}{2}$ کے مندرجہ کردہ

$$د - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (1 - لا) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (1 - لا)$$

$$= \frac{1}{2} - [\frac{1}{2} - (1 - لا) - \frac{1}{2}]$$

$$= د - لا - (1 - لا) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = د - لا + لا - 1 + 1 = د$$

$$= \frac{1}{2} - لا - (1 - لا)$$

امثلہ

باب سوم ہوا کہ نقطہ راوس خط میں ہے جو مساوات (۱۰) سے تعبیر ہوتا ہے اس واسطے کہ محدین سے (۱۰) کے شرائط پوری ہوتی ہیں

امثلہ

(۱) مساواتین اور خطوط کی دریافت کرو جو نقطہ ہارذیل میں دو دہن گذرین

(۱) (۱۰) اور (۱-۱)

(۲) (۳۲) اور (۴۲)

(۳) (۱۰۱) اور (۲-۲)

(۴) (۱۰۰) اور (۰-۰)

(۲) اور خطوط کی مساواتین دریافت کرو جو نقطہ (۴، ۴) پر گذرتی ہیں اور خط $x=2$ پر زاویہ

زاویہ سیلان 45° کا بناتے ہیں

(۳) اور خطوط کی مساواتین دریافت کرو جو نقطہ (۱۰، ۱) پر گذرتی ہیں اور خط $x=2$ پر زاویہ

سیلان 45° کا بناتے ہیں

(۴) اور خطوط کی مساواتین دریافت کرو جو محور میں گذرتی ہیں اور خط $x=2$ پر زاویہ سیلان 45° کا بناتے ہیں

(۵) اور خطوط کی مساواتین دریافت کرو جو محور میں گذرتی ہیں اور خط $x=2$ پر زاویہ 45° کا بناتے ہیں

(۶) زاویہ درمیانی خطوط $x=2$ اور $x=2$ کا دریافت کرو اور ان کی نقطہ تقاطع کے محدین کو

(۷) زاویہ درمیانی خطوط $x=2$ اور $x=2$ کا دریافت کرو

(۸) زاویہ درمیانی خطوط $x=2$ اور $x=2$ کا بناتے ہیں

(۹) اور خطوط مستقیم کی مساواتین دریافت کرو جو محور کے نقطہ معلوم پر گذرتی ہیں اور محور پر زاویہ

زاویہ بناتی ہیں

(۱۰) مساوات اور خط کی دریافت کرو جو محور میں گذرتا ہی اور خط $x=2$ پر

(۱۱) عمودی فاصلہ نقطہ (۱۰-۲) کا خط $x=2$ سے دریافت کرو

(۱۲) نقطہ (۱۰، ۱) سے جو عمود خط $x=2$ پر $y=1$ اور نکال دیا کہ اس کا طول دریافت کرو

(۱۳) خطوط $x=2$ اور $x=2$ کا نقطہ تقاطع دریافت کرو

(۱۳) مساوات اوس خط کی دریافت کرو جو نقطہ (اوب) پر اور نقطہ تقاطع

$$4x + y = 1 \text{ اور } 3x + 2y = 1 \text{ پر گزرتا ہے}$$

(۱۵) مقامات مساوات باز ذیل کی دریافت کرو

(۱) $4x + 5y = 0$ (۲) $4x - 5y = 0$

(۳) $4x + 5y = 0$ (۴) $4x = 0$

(۵) $4x + 5y + 6z = 0$ (۶) $4x - 5y = 0$

(۱۶) ان مساواتوں کے معنی بیان کرو

(۱) $4x - 5y = 0$ (۲) $4x + 5y = 0$

(۳) $4x + 5y = 0$ (۴) $4x - 5y = 0$

(۱۷) کون سے خطوط اس مساوات سے تعبیر ہوتے ہیں کہ

(۱۸) ثابت کرو کہ $4x + 5y = 0$ اور $4x - 5y = 0$ دو خطوں کو تعبیر کرتی ہیں

جو ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتے ہیں

(۱۹) دو اربعہ المضلع کے وتروں کی مساواتیں دریافت کرو اوسکی اضلاع ان مساواتوں سے

تعبیر ہوتی ہیں $4x + 5y = 0$ اور $4x - 5y = 0$

(۲۰) اب اس دی ق ایک سیدس منظمی کو مبدا مقرر کرو اور اب ایک محور لگا دو

اور ایک خط نقطہ سے عمود اب پر نکال کر محور قرار دو تو مساواتیں اوس خطوں کی دیں

جو سیدس کے دو دوقونوں کے نقطوں میں طائی جائیں

(۲۱) ایک مثلث کے کونوں کے نقطوں کے معین معلوم ہیں تو مساوات اوس خط کی دریافت کرو

جو دو ضلعوں کے نقاط وسط طایا جائے

(۲۲) مماس اوس زاویہ کا دریافت کرو جو درمیان خطوط

$4x + 5y = 0$ اور $4x - 5y = 0$ واقع ہو اور محور میں

اور سیدس محور قائم الزاویہ ہونے یا محرف

(۲۳) متوازی الاضلاع کے دو ضلع اداونکی درمیان کا زاویہ معلوم ہی تو اوسکی خطوط کی

مثلاً

۷۹

باب سوم

مساواتین کے درمیان کے زاویہ دریافت کرو اور ایک اس کے کونے کے نقطہ کو سید

اور اس کے دو ضلعوں کو جو اس نقطہ پر ملتے ہیں محور قرار دو

(۲۵) دفعہ ۷ کے شکل میں ب اور ب س کر لاؤ کہ محور مقرر کرو اور فرض کرو کہ

ب = ۱ اور ب س = ۱ اور ح اور ق محدودین نقطہ کے ہیں تو مساواتین

۱ اور ب د اور ۱ اور س د کی بناؤ

(۲۶) سب باتین مثال ۲۵ کی فرض کہ اس اور ب د کی نقاط وسط کی محدودین دریافت کرو

اس خط کی مساوات بنلاؤ جو ان نقطوں پر گزرتا ہے

(۲۷) سب باتین مثال گذشتہ کی فرض کرو تو ی ف کے نقطہ وسط کی محدودین دریافت کرو

اور ثابت کرو کہ یہ نقطہ اس خط میں واقع ہوتا ہے جو اس اور ب د کے نقاط وسط میں ملتا ہے

(۲۸) اگر $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ اور $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ مساواتین اور دو خطوط کی ہوں جو محدودین

محوروں کے ساتھ (خواہ وہ قائم الزاویہ ہوں خواہ محض) مساوی قیوں کے محیط ہوتی ہیں

اور لہ اور محدودین اور کے نقطہ تقاطع کے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

(۲۹) کون سے نقطے محور لہ خط $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ سے عمودی فاصلہ لے سکتی ہیں

(۳۰) مساوات خط کی یہ ہے کہ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ جو نقطہ اس خط میں ہو اس کی محدودین کے

درافیت کریں گے مساوات دریافت کرو اور نقطہ معلوم (سہ حصہ) سے اس خط کا قاطع

ایک خط معلوم کے برابر ہے اور ثابت کرو کہ اکثر ایسی دو نقطوں ہوں گی اور خاص صورتوں میں

دونوں نقطے منطبق ہوں گی اور س (۱ + ۱) = (۱ حصہ + ب سہ حصہ) (ب)

(۳۱) جو دو خط مساوات ذیل سے تعبیر ہوئے ہیں ان کی درمیان کے زاویہ کا محاس دریافت کرو

$$1/a + 1/b + 1/c = 1/d$$

(۳۲) نقاط تقاطع ان خطوں مستقیم $1/a + 1/b + 1/c = 1/d$ اور $1/a + 1/b + 1/c = 1/e$ کا

اور $1/a + 1/b + 1/c = 1/f$ کے دریافت کرو اور ثابت کرو کہ یہ مثلث کا جو اون کے بنے گا

(۳۳) یہ مثلث کا جو خط مستقیم $1/a + 1/b + 1/c = 1/d$ اور $1/a + 1/b + 1/c = 1/e$ کا

سب (ج - ب) جرمی

سب (ج - ب) جرمی

(۳۴) مساواتین دو خطوط مستقیم متوازیہ کی معلوم ہیں اور ان کے درمیان کا فاصلہ دریافت کرو

(۳۵) زاویہ درمیانی ان خطوط کا دریافت کرو

(۳۶) معنی ج (ر) = کے بیان کرو مثلاً جب $\frac{r}{s} = \frac{m}{n}$ اور $\frac{r}{s} = \frac{m}{n}$ جب $r = m$ اور $s = n$

(۳۷) اگر محور زاویہ درمیان میں تو یہ خطوط لا + ب + ر + س = ۰ اور لا + ب + ر + س = ۰ کیساں ہیں محور لا سے مخالف سمتوں میں جب رہاں گے

(۳۸) مثال گذشتہ میں علاوہ یکساں میل محور کے ساتھ رہنے کے خطوط مبدیہ گذرین اور ایک دوسرے پر نمود ہوں تو مساوات خطوط کی یہ ہوں گیں کہ

(۳۹) دو خطوط متوازی زاویہ ر بناتے ہوئے محور لا پر دو نقطوں سے کہنے گئی ہیں جس کے محدبین

اوب اور لاوب ہیں تو ثابت کرو کہ ان خطوط کے درمیان فاصلہ (ا - ب) جرمی (ا - ب) جرمی ہی تو وہ قائم الزاویہ معلوم کرو جس کے اضلاع چار نقاط معلوم پر گذرین اور رقبہ معلوم اوس کا قیاس

(۴۰) ایک مربع سطح متحرک ہوتا ہے کہ اوس کے قطوں میں سی ایک قطر کی دو نو طرفین ہمیشہ دو

خطوط مستقیم قائم اور متقاطع علی القوائم بر رہتی ہیں اور یہ دو خطوط اوس سطح میں جن جسمین

مربع ہی تو ثابت کرو کہ اوس کی دوسری قطر کے دو نو طرفین ہمیشہ دو اور خطوط مستقیم قائم اور

متقاطع علی القوائم متحرک ہوں گیں

(۴۱) اب اور ب س دو خطوط ایک دوسرے پر نمود ہیں اور لا ایک نقطہ قائم سی اور ب ایک

خط مستقیم معلوم متحرک ہے اور لا ب اور ب س میں نسبت معلوم ہے تو نقطہ س کا مقام ان نقاط

متعین کرو

(۴۲) لا اور ب دو خطوط قائم ہیں اور کسی زاویہ پر وہ ملیں ہیں اور ایک خط طول معلوم کا ط لایہ

سرکٹا ہے اور ایک اور دوسرا خط طول معلوم کا ط پیر سرکٹا ہے تو مقام ان نقاط اوس

نقطہ کا دریافت کرو جو سطح سے مقرر کیا جائی کہ رافی جو اوس کے اور خطوط متحرک کے انجاموں

میں ملنے سے پیدا ہوں متقل ہوں

(۳۴) ثابت کرو کہ خطوط س اور ک ب اور ا ل پہنچیں ام میں ایک نقطہ پر ملے ہوں۔
(۳۵) اگر ایک مثلث کے اضلاع کو قطر بنا کر متوازی الاضلاع بنائیں اس طرح اسے کہ او نکی نسل سے متوازی

دو خطوط معلوم کئے رہیں تو اور قطر متوازی الاضلاع کے ایک نقطہ پر ملینگے
(۳۶) اگر ایک نقطہ قائم سے خط مستقیم کچھ جین جو خطوط مستقیم قائم سے جو ایک سطح میں ہیں نقاط
ا و ب د س و د ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ وغیرہ پر پڑیں پس اگر

$$ا د = ا ب + ب د + د س + س و + و د + د ۰ + ۰ ۰ ۰ ۰ ۰$$

اور لا ایک نقطہ ط پر ہو تو مقام التقاط لا کا ایک خط مستقیم ہے
(۳۷) ثابت کرو کہ رقبہ مثلث کا جو محور کا اور خطوط د = م + لا + س اور د = م + لا + س م
سے بنے یہ ہوگا کہ (س - م) (س - م)

(۳۸) رقبہ مثلث کا جو ان خطوں سے بنائے تحقیق کرو کہ د = م + لا + س اور د = م + لا + س م
(۳۹) رقبہ مثلث کا جو ان خطوط سے بنے کہ

$$د = لا + ب - س اور د = ب + لا - س اور د = س + لا - ب$$

یہ ہے کہ (ا - ب) (ب - س) (س - ا)

باب چہارم

خطوط مستقیم

(۴۰) پہلے بیان کئے ہیں کہ ہر ایک اوقات ان مساواتوں میں سے کہ

$$ا + لا + ب + د + س = ۰ اور ا + لا + ب + د + س = ۰$$

ایک خط کو تعبیر کرتی ہے۔ اب ہم مساوات ا + لا + ب + د + س + ج (ا + لا + ب + د + س) = ۰ (۱)
کے معنی بتلائیے ہمیں ج ایک مقدار مستقل ہے

اول مساوات (۱) ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے اس لئے کہ وہ درجہ اول کے مساوات متعادلات
متغیر لا و د کی ہے تو بموجب دفعہ ۱۴ کے ضرور اس سے ایک خط مستقیم تعبیر ہوگا
دوم خط جو (۱) سے تعبیر ہوتا ہے وہ ان خطوں کے نقطہ تقاطع پر گزرے گا جن کی مساواتیں یہ ہیں

(۲)

۱ ل + ب + د + س = ۰

(۳)

۱ ل + ب + د + س = ۰

اسوے کے قیمتیں لادور کی ان مساواتوں کی شرائط کو پورا کرتی ہیں وہی مساوات (۱) کی شرائط کو پورا کرتی ہیں یعنی نقطہ حبیر (۲) اور (۳) تقاطع کرتی ہیں (۱) پر واقع ہی ہو سکتا ہے سووم مقدار مستقل محکم کی قیمت مناسب مقرر کرنے سے مساوات (۱) پر خط مستقیم کو تعبیر کرتی نقطہ تقاطع (۲) اور (۳) پر گزرے

اسوے کے فرض کو لا اور د محدودین نقطہ تقاطع (۲) د (۳) کو تعبیر کرتے ہیں اور ایک خط اس نقطہ پر سے گزرتا ہوا کھینچا گیا ہے اور لدم اور د محدودین ایک دوسرے نقطہ کے مابین جو خط ملے ہو ابھی ہم نے صورت دوم میں ثابت کیا ہی کہ خط (۱) لدا اور د میں گزرتا ہی پس اب ہم کو صرف یہ ثابت کرنا باقی رہا کہ مسئلے کی مناسبت کی مقرر کردہ فی خط (۱) نقطہ لدم اور د میں گزرتا ہے اسوے کے جو خطوط مستقیم دو نقطے مشترک رکھتے ہیں وہ ایک دوسرے منطبق ہوتے ہیں لدم اور د کے بجائے لدا اور د کے مساوات (۱) میں رکھو اور محکم کی قیمت دریافت کو جو شرائط مساوات کو پورا کرے پس اس طرح معلوم ہوگا کہ

$$\text{محکم} = \frac{۱ ل + ب + د + س}{۱ ل + ب + د + س}$$

اب اس قیمت کو مساوات (۱) میں کام میں لاؤ تو مساوات

$$۱ ل + ب + د + س - \text{محکم} = \frac{۱ ل + ب + د + س}{۱ ل + ب + د + س} (۱ ل + ب + د + س) - (۱ ل + ب + د + س) = ۰ \quad (۴)$$

اوس خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو نقاط (لدا و د) اور (لدم و د) پر گزرتا ہے

پس ہم نے ثابت کر دیا کہ محکم کی مناسبت قیمت مقرر کرنے سے مساوات (۱) اوس خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو نقطہ تقاطع (۲) اور (۳) پر گزرتا ہی

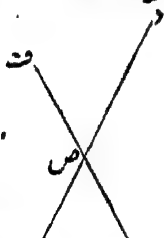
(۶۶) مسئلہ گذشتہ نہایت عظیم الشان مسئلہ ہی اور اکثر مبتدیان کو مشکل معلوم ہوتا ہے طالب علموں کو چاہئے کہ اوسکو چھوڑ کر یہیہ جنگ تیوں دعویٰ جو اوس میں مذکور ہوئی ہیں خوب سمجھ لیں۔ اول دعویٰ تو ظاہر ہی۔ دوسرے دعویٰ پر طالب علم اطمینان حاصل کر کے لئے قیمتیں لدا اور د کی مساوات ۱ ل + ب + د + س = ۰

باب چہارم

۵۳

خطوط مستقیم

اور $\alpha + \beta + \gamma =$ کو حل کر کے دریافت کرے اور ان کو مساوات
 $\alpha + \beta + \gamma + \delta =$ مح $(\alpha + \beta + \gamma + \delta) =$ میں رکھ کر دیکھے کہ شرائط مساوات
 پوری ہوتی ہیں اگر یہ بیان کچھ ضرورت مساواتوں کے حل کرنے کی نہیں ہے کیونکہ یہ بات ظاہر ہے
 کہ جو قیمتیں α اور β کی $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ میں اور $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ میں کو فنا کر نیکی وہ ضرور
 $\alpha + \beta + \gamma + \delta =$ مح $(\alpha + \beta + \gamma + \delta) =$ کو فنا کر نیکی کیونکہ جب وہ ہر رکھ کر
 فنا کرتی ہیں تو کل کو کیوں نہ فنا کر نیکی لکن تیسرا دعویٰ اکثر بہت مشکل معلوم ہوتا ہے، طالب علم
 جلدی سے یہ کہنے لگتے ہیں کہ اس کے ثبوت کی ضرورت نہیں ہے، یہ ظاہر ہے کہ مح کی مختلف
 قیمتوں کی مقرر کرنے سے مختلف خطوط مساوات سی تعبیر ہو سکتی ہیں لیکن اسے یہ نہیں ثابت ہوتا،
 کہ قیمت مناسب مح کی مقرر کرنے سے (۱) اس خط کو تعبیر کرتی ہی کہ نقطہ تقاطع (۲)
 و (۳) سے تعبیر ہوتا ہی مثلاً اگر خط مستقیم (۲) اور (۳) دسویں اور دسویں مح ہوں
 تو یہ واقع ہو سکتا ہی کہ تمام خط جو (۱) سے تعبیر ہوتی ہیں زاویہ دسویں مح کے درمیان
 واقع ہوں اور کوئی دسویں مح کے درمیان نہ واقع ہو۔ لیکن اس بات
 کے ثابت کرنے کی ضرورت ہی کہ مح کی قیمت مناسب
 (۱) میں ایسی مقرر کریں کہ مساوات کسی خط کی جو نقطہ ص پر
 گزرے دریافت ہو جائے



گذرے دریافت ہو جائے
 (۶) اس بات کی واسطی جس جگہ کو برابر صفر کی ہم لکھتے ہیں اس کو ہم ایک حرف سے تعبیر کرتے
 مثلاً دفعہ ۱۵ میں ہم نے اختصاراً جملہ لاجم ص + جب ہم ص = کو صرف ذرہ سے
 تعبیر کیا ہے اس طرح ہم ایسی جملوں $\alpha + \beta + \gamma + \delta =$ م لاس اور
 $\alpha + \beta + \gamma + \delta =$ وغیرہ کے واسطی روزیو اور مولیو ... ٹھہرائیں
 اب یہ بھی معلوم رہی کہ دفعہ ۶۵ کا ثبوت خط مستقیم کی مساوات کی خواہ کچھ ہی صورت ہو اس
 کام آ سکتا ہی جس طرح کہ مساوات $\alpha + \beta + \gamma + \delta =$ کے لئے کام میں آیا۔ اور
 یہ نتیجہ اس طرح بیان میں آ سکتا ہی کہ اگر $\alpha + \beta + \gamma + \delta =$ مساوات میں دو خطوط مستقیم کی ہوں

اور ہم ایک مقدار مستقل ہو تو مساوات $ل + م = ن$. ایک خط مستقیم کو تعبیر کر گنا جو نقطہ تقاطع
ان دو خطوط مستقیم میں گذرنا ہی اور ہم کی نسبت قیمت مقرر کرنے سے وہ کسی ایک خط
مستقیم کو تعبیر کر گنا اور ان دو خطوط کے نقطہ تقاطع پر گذرنا

(۱۶۸) اگر $ل = ۰$ اور $یو = ۰$. دو خطوط مستقیم کی مساوات میں ہوں تو ہم پہلے ثابت کر آئی ہیں کہ
 $ل + م = ن$. ایک خط مستقیم کو تعبیر کر گنا جو نقطہ تقاطع پر گذری بعض اوقات ہمیں نہایت
آسانی ہی کہ ہم نہایت قرینہ کی صورت $ل + یو = م$. کام میں لائے ہیں اور $ل$ اور $م$ دونوں
مستقل ہیں یہ ظاہر ہے کہ اول صورت کی نسبت جو بیان کیا گیا ہی وہی دوسری صورت

کی نسبت بھی بیان کیا جاسکتا ہی اور فی الحقیقت دوسری صورت اول سی اس طرح مستنبط ہو سکتی ہے کہ
بجائے $ل$ کے $م$ لکھیں یہ بات ہمیشہ اس باب میں یاد رکھنی چاہیے کہ $ل$ و $م$ دونوں مقداریں مستقل
ہیں اگر یہ اختصار کی نظر ہے ہر دفعہ او کی مستقل ہو سکا اظہار نہیں کرتے

(۱۶۹) علیٰ نذا القیاس اگر $ل = ۰$ اور $م = ۰$ اور $ی = ۰$. مساوات میں خطوط مستقیم کی ہوں اور
 $ل$ و $م$ و $ن$ مقداریں مستقل ہوں تو مساوات

$ل + م + ن = ۰$ (۱) مستقیم
ایک خط مستقیم کو تعبیر کر گنا۔ سوا ازین مناسب قیمتیں $ل$ اور $م$ اور $ن$ کی مقرر کرنے سے ہم خطوط
کو خواہ وہ کچھ ہی ہو تعبیر کر سکتی ہیں۔ اس واسطے کہ اگر ہم یہ چاہیں کہ مساوات او خط کو تعبیر کرے جو
نقاط (لا دے) اور (لام اور م) پر گذرنا ہی تو فرض کرو کہ $ل = ۰$ اور $م = ۰$ اور $ی = ۰$ قیمتیں $ل$ اور $م$
اور $ی$ کی لاکھ لاکھ اور $ن$ کی جگہ $ی$ کی رکھنی سی ہو جاتی ہیں اور $یو = ۰$ اور $م = ۰$ اور $ی = ۰$ قیمتیں
 $ل$ اور $م$ اور $ی$ کی بجای لاکھ لاکھ اور $ن$ کے $ی$ کے رکھنے سے ہو جاتی ہیں تو قیمتیں $ل$ اور $م$
ان مساواتوں سے دریافت کرو کہ

$$ل + یو + م + ن = ۰$$

$$ل + یو + م + ن = ۰$$

فرض کرو کہ اوکلی قیمتیں اس طرح دریافت ہوتی ہیں کہ
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$ $\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$
 یوں $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ میں رکھو تو یہ حاصل ہوگا کہ
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots$

یا $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots$ یہ مساوات تعبیر کرتی ہے اوس خط کو جو نقاط (۱) اور (۲) کے
 (۱) میں سے گزرتا ہے ہوا پر ذکر کر آئے ہیں کہ مساوات (۱) ہر خط مستقیم کو اکثر تعبیر کر سکتی ہے
 کچھ بعض صورتیں مستثنیٰ ہیں اور گلابیان ہم کرتے ہیں

جب خط جو اس والوں یوں = ۰ اور یوں = ۰ اور یوں = ۰ سے تعبیر ہوتے ہیں ایک نقطہ پر ملے ہیں تو مساوات
 (۱) بالضرور اوس خط سے تعبیر ہوتی ہے جو اوس نقطہ پر گزرتا ہے

اس واسطے کہ خطوں معلومہ ایک نقطہ پر ملتے ہیں تو یوں اور یوں اوس نقطہ پر ایک ہی وقت میں فنا
 ہوتی ہیں پس اسے ثابت ہوا کہ مساوات (۱) سے جو خط تعبیر کرتا ہے وہ اوس نقطہ پر گزرتا ہے
 - جب تینوں خطوط متوازی ہوں گی تو مساوات یوں = ۰ اور یوں = ۰ اور یوں = ۰ کی یہ صورتیں ہوں گی

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = ۰$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = ۰$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = ۰$$

اور مساوات (۱) کی اس صورت میں تخمین ہوگی کہ

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots = ۰$$

اور یہ مساوات اوس خط کو تعبیر کرتی ہے جو متوازی خطوط معلومہ ہوں

پس اگر تینوں خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں یا تینوں خطوط متوازی ہوں تو اوس صورت میں مساوات (۱)
 ہر ایک خط کو نہیں تعبیر کر سکتی اس واسطے کہ اول صورت میں اس مساوات سے فقط وہ خط تعبیر ہوگا
 جو اوس نقطہ پر گزرتا ہے اور دوسری صورت میں وہ خط تعبیر ہوگا جو متوازی خطوط معلومہ کا
 پس یہ صرف دو صورتیں مستثنیٰ ہیں اور کوئی اور صورت مستثنیٰ نہیں - اس واسطے کہ صرف ایک
 صورت ہی جس میں اکثر یہ قاعدہ ٹوٹتا ہے یعنی جب مح و مح و می سب فنا ہوتی ہیں یعنی جب

۱ می ۲ - سوم می ۱ = ۰

۱ می ۲ - سوم می ۱ = ۰

اب ہم ثابت کریں گے کہ جب مساوات (۲) کی شرائط پوری ہو گئیں تو تینوں خطوط ایک نقطہ پر ملنے لگے۔
یا متوازی ہوں گے

اول فرض کرو کہ (ل ۱ و ۲) اور (ل ۳ و ۴) ایسے قطعی ہیں جو ان خطوط میں کسی ایک خط میں بھی نہیں ہیں پس کوئی ان متوازیوں ۱ و ۲ و ۳ و ۴ میں سے فنا نہیں ہوگی

(۲) کی مساواتوں میں سے اول سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{م ۱}{م ۲} = \frac{م ۱}{م ۲}$ کی ایک مساوات ہے ثابت ہوتا ہے کہ جو دو دفعہ ۲ کے نسبت نمودار کی نقطہ (ل ۱ و ۲) اور (ل ۳ و ۴) سے خط مو = ۰ پر وہی نسبت

رکھتی ہیں جو نموداروں میں نقطہ کے خط می = ۰ پر آپس میں رکھتی ہیں پس موافق علم ہندسہ کے یہ نتیجہ ہوتا ہے کہ خطوط مو = ۰ اور می = ۰ دونوں متوازی ایک خط کے ہیں جو نقاط (ل ۱ و ۲) و (ل ۳ و ۴) میں ملتا ہے

مساواتوں میں سے دوم اور سوم سے نکلتی ہیں کہ ثابت ہوتا ہے کہ اس صورت میں جب مساوات (۲) کی شرائط پوری ہوتی ہیں تو تینوں خطوط ایک نقطہ پر ملنے لگے یا متوازی ہوں گے

دوم فرض کرو کہ دو نقاط معلومہ میں سے ایک نقطہ تین خطوط میں سے کسی ایک خط پر واقع ہے مثلاً خط می = ۰ پر تو (۲) کی مساواتوں میں سے اول سے یہ نتیجہ ہوتا ہے کہ کیا تو مو = ۰ یا می = ۰

اول فرض کرو کہ مو = ۰ تو (۲) کے دوم اور سوم کی مساواتوں سے ہم متنبہا کرتے ہیں کہ کیا مو = ۰ یا می = ۰ یا سو = ۰۔ اول صورت میں تینوں خط نقطہ (ل ۱ و ۲) پر گزرتی ہیں اور دوسری صورت

میں خطوط مو = ۰ اور می = ۰ دونوں نقاط (ل ۱ و ۲) اور (ل ۳ و ۴) پر گزرتے ہیں یعنی خطوط معلومہ میں سے دو خط منطبق ایک دوسرے پر ہیں اس طرح سے تینوں خط کے کیا تو دو خطوط متقاطع ہو جائیں گے یا دو خطوط متوازی ہو جائیں گے۔ فرض کرو کہ ہم می = ۰ کے ساتھ می = ۰ کے قرار دیتے ہیں

تو خط می = ۰ نقاط معلومہ (ل ۱ و ۲) اور (ل ۳ و ۴) میں گزرتے ہیں اور (۲) کی تیسری مساوات

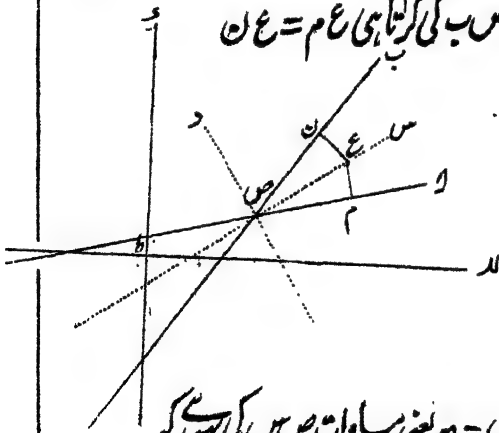
$$\frac{لوم}{موم} = \frac{لوم}{موم}$$

پس اس سطح خطوط لو = . اور مو = . کیا تو خط سے جو نقاط (لام رسم) اور (لام ادم) میں ملا یا جا
 طے ہیں یا متوازی اوس خط کی ہیں یعنی خطوط لو = . مو = . دی = . ایک نقطہ پر طے ہیں یا متوازی ہیں
 (۷۰) فرض کرو کہ ص = . اور ب = . مساواتین دونوں کی ہوں اور دو طرح کی رقوموں میں بیان
 ہوئی ہوں ایک ان نمودوں کے جو متبادر نکالیں اور دوسرے ان کی میلان کی جو محمولہ کیے ساتھ
 (دفعہ ۵۰ دیکھو) اسکی یہ معنی ہیں کہ مساوات لاجم ب + وجب ب سے ا کا اختصار ص =
 اور مساوات لاجم ب + وجب ب سے م کا اختصار ب ہی ہو تو ہم بتلائیے کہ مساواتوں
 ص = ب = . اور ص = ب = . کے کیا معنی ہیں

فرض کرو کہ ص ل خط ص = . ہو

ص ب خط ب = . ہو

اور ص میں زاویہ لاص ب کی تصنیف کرتا ہی اور ص د تکملہ لاص ب کی تصنیف کرتا ہی تو زاویہ
 دص میں قائمہ ہوگا اور ص میں کوئی نقطہ ع کا لیکر ع م اور ع ن نمود لاص اور ص ب پر نکالو
 اگر لا اور د مسجدین نقطہ ع کے ہوں تو طول ع م کا صہ موجب دفعہ ۴۰ کے ہی اور طول ع ن کا
 ب ہی چونکہ ص میں تصنیف زاویہ لاص ب کی کرتا ہی ع م = ع ن



اسطے ص میں ہر نقطہ کے واسطے ب = ص یعنی مساوات ص میں کی جیسے کہ

علیٰ ہذا القیاس مساوات ص دکی جیسے کہ ب = ص

تقاطع پر گزرتے۔ فرض کرو کہ دفعہ ۱۰ میں ص ۱ اور ص ب اولیٰ دو خطوط مستقیم

اور ص ب اور ص د دوم دو خطوط مستقیم ہیں تو

$$\frac{\text{جب س ص ب}}{\text{جب س ص د}} = \frac{\text{جب د ص ب}}{\text{جب د ص د}}$$

اسوے بموجب دفعہ ۱۰ کے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر غ عمود نقطہ (ل د و) سے خط یو = یو تو یو = ح یو

جس میں ح مقدار متقل ہے اور علیٰ ہذا القیاس اگر غ عمود اوسے نقطہ سے ہو = یو نکال دیا جائے

تو = ح یو = ح یو جس میں ح ایک مقدار متقل ہے۔ اسے ثابت ہوا کہ

اوس ح یو = ۰ یا $\frac{1}{\text{ح}}$ - $\frac{1}{\text{ح}}$ = ۰ سے معلوم ہوتا ہے کہ $\frac{1}{\text{ح}} = \frac{1}{\text{ح}}$

بس باعتبار تعداد کے بغیر لحاظ علامت جبر کے

$$\frac{\text{جب س ص ب}}{\text{جب س ص د}} = \frac{\text{جب د ص ب}}{\text{جب د ص د}}$$

$$\frac{\text{جب س ص ب}}{\text{جب س ص د}} = \frac{\text{جب د ص ب}}{\text{جب د ص د}}$$

$$\frac{\text{جب س ص ب}}{\text{جب س ص د}} = \frac{\text{جب د ص ب}}{\text{جب د ص د}}$$

$$\frac{\text{جب س ص ب}}{\text{جب س ص د}} = \frac{\text{جب د ص ب}}{\text{جب د ص د}}$$

$$\frac{\text{جب س ص ب}}{\text{جب س ص د}} = \frac{\text{جب د ص ب}}{\text{جب د ص د}}$$

(۳) دفعات گذشتہ کے اصول کو ہم بعض مثالوں میں کام کے اندر لکھتے ہیں

فرض کرو کہ ص = ۰ اور ب = ۰ اور گ = ۰ مساواتیں تین خطوں کی ہوں جو آپس میں

اور ایک مثلث بناتی ہوں اور فرض کرو کہ ب د مثلث کے اندر ہی ہو تو مساواتیں تین خطوں کی جو

اندر کے زاویوں کی تہ صیف کرتی ہیں بموجب دفعہ ۱۰ کی یہ ہو گئیں

$$\text{ب} - \text{ر} = ۰ \quad (۱) \quad \text{ر} - \text{ھ} = ۰ \quad (۲) \quad \text{ھ} - \text{ب} = ۰ \quad (۳)$$

یہ تینوں خط ایک نقطہ ملتے ہیں اسوے یہ بات ظاہر ہے کہ جو تہیں لہ اور د کی معاً

مساوات (۱) اور (۲) کی شرائط کو پورا کرتی ہیں وہ (۳) کے شرائط کو بھی پورا کرتی ہیں

اب یہ مساواتیں تین خطوں کی جو مثلث کے زاویوں میں سے گذرتی ہیں مثلث کے

زاویوں کے مکمل زاویوں کی تہ صیف کرتے ہیں تو اوٹکی مساواتیں یہ ہو گئیں

$$\text{ب} + \text{ر} = ۰ \quad (۴) \quad \text{ر} + \text{ھ} = ۰ \quad (۵) \quad \text{ھ} + \text{ب} = ۰ \quad (۶)$$

یہ بدیہی ہے کہ (۳) (۴) (۵) ایک نقطہ ملتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس (۶) (۷) (۸)

ایک نقطہ پر ملے ہیں اور علیٰ ذہن القیاس (۴) (۶) (۲) ایک نقطہ پر ملے ہیں اس قسم کی تمام دعووں میں مسئلہ کو مثلث کے اندر سمجھنا چاہئے، بشرطیکہ اس کی خلاف نہ بیان کیا گیا ہو (۴) اگر $ھ = ۰$ اور $ب = ۰$ اور $س = ۰$ مساواتیں تین خطوں کے ہوں جسے کہ مثلث بنا ہی تو ہر ایک خط اس مساوات سے تعبیر ہوگا کہ $ل + ھ + م + ب + ن + س = ۰$ اور جو مستثنیٰ صورتیں

دفعہ ۶۱ میں بیان کیں ہیں وہ یہاں نہیں واقع ہو سکتیں فرض کرو کہ ط و طب و طس طول اضلاع مثلث کو تعبیر کرتے ہیں اور یہ ضلع خطوط $ھ = ۰$ اور $ب = ۰$ اور $س = ۰$ کے حصے ہونگے کوئی نقطہ مثلث کے اندر مقرر کرو اور اس میں اور مثلث کے کونوں کے نقطوں میں خطوط وصل کرو تو تین مثلث پیدا ہونگی جن کے رقبے یہ ہونگے

- ط اھ و - - طب ب و - - طس س ا سے ثابت ہوا کہ
ط اھ و + طب ب - طس س = ایک مقدار مستقل کے

حقیقت مستقل مقدار رقبہ مثلث سے جو منفی لیا جائے دو چند ہے اسے یہ ظاہر ہے کہ مثلث کے اندر کوئی سا نقطہ $ھ = ۰$ اور $ب = ۰$ اور $س = ۰$ کے موافق مقرر کیا جائے اس کے واسطے نتیجہ مذکور ثابت ہی اور اگر مختلف صورتوں کا امتحان کریں تو ثابت ہوگا کہ یہی نتیجہ اس نقطہ کے واسطے بھی ہے جو مثلث سے باہر واقع ہو ثابت ہی - اسے ثابت ہوا کہ علی العموم یہ نتیجہ ثابت ہی فرض کرو کہ ہم مساوات ایک خط کی جو متوازی اس خط $ل + ھ + م + ب + ن + س = ۰$ کا ہو دریافت کرنا چاہتے ہیں تو یہ مساوات مطلوب سطح لکھی جائیگی
 $ل + ھ + م + ب + ن + س + ق = ۰$

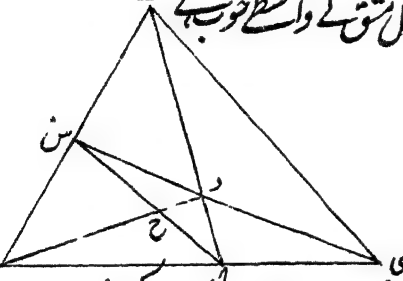
یہاں موجب دفعہ ۳۸ کے ق مقدار مستقل ہے
یا اس سبب کہ ط اھ و + طب ب + طس س مقدار مستقل ہے تو مساوات مطلوب سطح
جاسکتی ہے کہ $ل + ھ + م + ب + ن + س + ق (ط اھ و + طب ب + طس س) = ۰$
جسمین ق ایک مقدار مستقل ہے

(۵) خطوط جو مساواتوں پر ۰ اور $م = ۰$ اور $س = ۰$ سے تعبیر ہوتی ہیں ایک نقطہ پر ملنے

بشرطیکہ $ل + یو + م + ن = می$. ایک سطرابقہ ہوا دل و م دن مقادیر مستقل ہیں
اس واسطے اگر $ل + یو + م + ن = می$. متطابقہ ہیں تو اس سے ہم کو ہمیشہ یہ حاصل ہوتا ہے کہ
 $می = ل + یو + م$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات $می = ل + یو + م$ اس طرح لکھی جاتی ہے کہ

یعنی خط $می = ل + یو + م$. ایک خط ہی جو نقطہ تقاطع $یو = ل$ اور $یو = م$ سے گزرتا ہے
(۶) اس باب میں یہ شال مشق کے واسطے خوب ہے



فرض کرو کہ $ل$ بس و ایک ذواربۃ الاضلاع ہی وتر $اس$ اور $ب$ کچھ $ل$ اور $س$ دو برابر
نقطہ ہی پر $لاؤ$ اور $ب$ $س$ اور $لاؤ$ کو خارج کر کے نقطہ $ف$ پر $لاؤ$ اور $ی$ $ف$ وصل کرو اسکو
تیسرا وتر ذواربۃ الاضلاع کا کہتے ہیں فرض کرو کہ

$یو = ل$. مساوات $ل$ کی (۱)

$یو = م$. مساوات $ب$ کی (۲)

$می = ل$. مساوات $س$ کی (۳)

اب ہم شکل کی اور خطوط کی مساواتیں ارقام یو یو $می$ $سن$ اور مقادیر مستقل ہیں
تعبیر کر سکتے ہیں - فرض کرو کہ مساوات $ب$ کی

$ل + یو + م = می$ (۴)

اور مساوات $س$ کی واسطے

م $یو = ل$ (۵)
یہ فرض کرنا خلاف قاعدہ نہیں ہے اس واسطے کہ مساوات (۴) کسی خط کو تعبیر کرتی ہے

جو نقطہ ب پر گزرتا ہی خواہ کچھ ہی قیمت ل اور م کی ہو اور اسے متقل تھا دیکر کے مناسب قیمت ل ہی مقرر کرنے سے (۴) کو ب سے تعبیر کر سکتے ہیں اور نیز مساوات (۵) ایک خط کو تعبیر کرتی ہے جو نقطہ س پر گزرتا ہی اور ن کی قیمت مناسب مقرر کرنے سے ہم اس سے اس کو تعبیر کر سکتے ہیں اگر چہ ہمیں تو ان میں متادیر متقل و م و ن میں سے ایک کو واسطہ سے تعبیر کرین لیکن یہ عام خلاف قرینہ ہی اسلئے ہم اس کو نہیں اختیار کریں گے مساوات (۶) کی یہ ہے کہ

$$ل یو - م مو + ن می = ۰ \quad (۶)$$

اسوٹے کہ (۶) تعبیر اس خط کو کرتا ہی جو ل یو - م مو = ۰ اور می = ۰ کے نقطہ ہے تقاطع پر گزرتا ہی یعنی ایک خط جو نقطہ د پر گزرتا ہی اور نیز (۶) اس خط کو ہی تعبیر کرتا ہے جو نقطہ تقاطع یو = ۰ اور م مو - ن می = ۰ کے نقطہ تقاطع پر گزرتا ہی یعنی ایک خط جو نقطہ ا پر گزرتا ہی ہے ثابت ہوا کہ (۶) سے تعبیر ہوتا ہی - مساوات (۷) کی یہ ہے کہ

$$ل یو + ن مو = ۰ \quad (۷)$$

اسوٹے کہ (۷) خط کو تعبیر کرتی ہی کہ نقطہ ی پر گزرتا ہی اور جو نکل ل یو + ن می = ۰ ل یو - م مو + ن می + م مو تو کسی خط کو جو نقطہ ف پر گزرتا ہی (۷) تعبیر کرتی ہے اسے ثابت ہوا کہ خطی ف کو (۷) تعبیر کرتا ہے فرض کرو کہ ح نقطہ تقاطع اس اور ب دکا ہی تو مساوات ی ح یہ ہے کہ

ل یو - ن می = ۰ \quad (۸)

اسوٹے (۸) تعبیر کرتا ہی خط کو جو تقاطع (۱) اور (۳) پر گزرتا ہی اور نیز نقطہ

(۴) اور (۵) پر تو مساوات ف ح یہ ہے کہ

$$ل یو - ۲ م مو + ن می = ۰ \quad (۹)$$

اسوٹے (۹) تعبیر کرتا ہی ایک خط کو جو نقطہ تقاطع (۴) اور (۵) پر گزرتا ہی اور نیز

(۲) اور (۶) کے نقطہ تقاطع پر گزرتا ہی

فرض کرو کہ ب خارج کیا گیا ہیئت ہو نقطہ برطانی اور اس اور ہیئت خارج شدہ نقطہ
کیا پر خطے ہیں تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ مساوات ۱۰ کی
رہل یو۔ م مو + ن می = ۰

مساوات ۱۰ کی ہیئت م مو + ن می = ۰

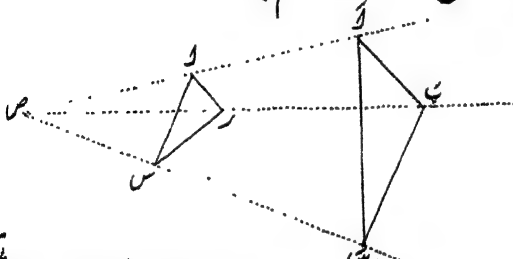
سک بہتے ل یو + م مو = ۰

کود کی رہل یو۔ م مو + ن می = ۰

اس مثال کو مینے اس خیال سے لکھا ہے کہ طالب علموں کو خطوں کی مساواتیں بنائیں مثلاً ہو جائزہ اور سکوئی
ٹرنی بات نہیں ہے۔ اب ہم ایک ویشال لکھتے ہیں

(۷) اگر دو مثلث ایسی ہوں کہ ان کی نظیر کے زاویوں میں خطوط وصل کی گئی کسی ایک نقطہ پر

تو اضلاع نظیر کے تقاطع تقاطع ایک خط مستقیم میں واقع ہوں گے



فرض کرو کہ اب اس ایک مثلث اور اب اس دوسرا مثلث ہی اور وہ نقطہ جہ خطوط ۱۰ اب اس میں
اور فرض کرو کہ مساوات ۱۰ کی رہل یو۔ اور اس کی مو = ۰ اور اب کی می = ۰ اور فرض کرو کہ اس کے وسطیہ مساوات ہی

(۱) ل یو + م مو + ن می = ۰

(۲) ل یو + م مو + ن می = ۰

دفعہ ۶۹ میں ثابت کیا گیا ہے کہ مساوات ۱۰ کی اور ہیئت میں لکھی جاسکتی ہے اور

دفعہ ۷۰ کے طریقہ پر چنے سے ثابت ہو سکتا ہے کہ تقادیر مستقل اور ہم کی مناسب

قیمتوں کے مقرر کرنے سے (۲) کو اس کے تغیر کر سکتے ہیں اب ہم ثابت کرینگے کہ مساوات

۱۰ کی اس صورت میں لکھی جاسکتی ہے کہ

(۳) ل یو + م مو + ن می = ۰

مستقل نہ بظاہر ایسا معنی ہو سکتا ہے کہ خط جو (۳) سے تغیر ہو لایر گذرے فرض کرو

ن ایسا معنی ہو گیا تو اب یہ ثابت کرنا کہ خط (۳) ب پر گذرے گا (۱) اور (۲)

سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ مساوات (ل-ل) + (م-م) = (م)۔ (۴)
 کسی خط کو تعبیر کرتی ہے جو نقطہ س پر گزرتا ہے
 لیکن (۴) ظاہر تعبیر اوس خط کو کرتی ہے جو نقطہ تقاطع ب س اور س لا پر گزرتا ہے
 اسے معلوم ہوا کہ (۴) مساوات س میں کی ہے

اور خط جو (۳) سے تعبیر ہو بموجب فرض کے نقطہ لا پر گزرتا ہی پس (۲) اور (۳)

یہ حاصل ہوتا ہے کہ (م-م) + (ن-ن) = (ن)۔ (۵) یہ مساوات لا کی ہے
 یہ مساوات (ل-ل) + (و-و) = (و)۔ (۶) ایک خط کو تعبیر کرتی ہے
 جو ب س اور لا کے تقاطع پر گزرتا ہی یعنی نقطہ ب پر اور (۴) و (۵) سے یہ استخراج ہوتا ہے
 کہ یہ خط س لا اور لا کے نقطہ تقاطع پر ہی گزرتا ہی یعنی نقطہ ص پر اسے معلوم ہوا کہ (۶)
 مساوات ص کی ہے

اب (۱) اور (۳) سے یہ نکلتا ہی کہ خطوط جو ان واووں سے تعبیر ہوتے ہیں خط (۶) پر ملتی
 اسے معلوم ہوا کہ (۳) مساوات لا کی ہے

پس دعویٰ مطلوب ہمارا آسانی سے ثابت ہوتا ہی کہ خط جو اس مساوات

ل + م + ن = می (۷) سے تعبیر ہوتا ہی

ب س اور ب س کے اور س لا اور س لا کے اور لا ب اور لا ب کے نقطہ تقاطع پر
 گزرتا ہی یعنی یہ تینوں نقطہ تقاطع ایک خط مستقیم میں ہیں

بالعکس کے اگر دو مثلث ایسی ہوں کہ اضلاع نظیرہ کے نقاط تقاطع ایک خط مستقیم
 ہوں تو زوایا نظیرہ میں خطوط وصل کی گئی ایک نقطہ پر ملینگے۔ اس دعویٰ کا اثبات
 خطوط ب س دس لا و لا ب د ب س و س لا سے اوسط طرح شروع کریں جس طرح

اوپر لکھا ہی اور (۳) کو فرض کریں کہ وہ مساوات ایک خط کی ہی جو لا پر گزرتی
 تو (۷) اوس خط کو تعبیر کریگا جو نقطہ تقاطع ب س اور ب س پر اور س لا اور
 س لا پر گزرتا ہے اب (۴) مساوات اوس خط کی ہے جو لا ب اور لا ب کے تقاطع میں

نکلتا ہی کہ کسی نقطہ تقاطع اور باہر گزرتا ہی

یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ مساوات خط کی جو تقاطع OB اور OS پر اور OS اور OB کے گزرتا ہے

(۸) یہ بھی کہ $ل + و + م + ن = ۰$

اور تقاطع (۸) کا ب س کے ساتھ اس خط

(9) پر واقع ہوگا کیا جائے

اور علیٰ ہذا القیاس خط جو نقطہ تقاطع ب اور س اور نقطہ تقاطع ب و س اور ب و مین وصل

س ۱ سے (۹) میلگیا اور بنر خط جو تقاطع س ۱ اور س ۲ ب اور تقاطع س ۲ ب اور س ۲ ا میں

ملایا جاوے اور سے (۹) طریقہ

(۸) مساوات لو + محو =۔ ایک خط مستقیم کو قطع کرتی دو خطوط لو =۔ اور مو =۔ کے

تھا طبع رنگ نہ تباہ اس سے معلوم ہوا کہ اگر ایک خطا کا بدلہ ملے اور اس سے کمال ہو جائے تو انسان

بہ صورت یہ کہ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ اور نقطہ Q مستقیم AC پر قریب سے ہو تو تینوں خط نقطہ

تقاطع ل = ۰ اور س = ۰ پر گزرتی ہے

مشائیں

(۱) مساوات خط کی دریافت کو جو مسدور میں گذرتا ہی اور ان خطوں کو تقاطع کرتا ہی کہ

$$1 = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \text{ اور } 1 = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

(۲) محور لیر دو نقطے A اور B اور محور CD پر دو نقطے C اور D اور ایک لکیر معلوم ہر مسئلہ کے

۱۔ اور ۱ اور ۱ نقطہ کے تقاطع کے ہیں۔ اور ۱ اور ۱ نقطہ کے تقاطع کے ہیں۔

ہی اور چاہے اور اب نقطہ پر سس کے ہیں اور اب اور اب نقطہ پر سس کے

طعن فی دریافت اروا و ثبات اروا و محور دس خط سے نسبت موسمی میں سم ہوتا،

(سو) اگرہے = اورب = اورس = ساواین ملٹ لبس کے زاوون لبس

کے مقابل اضلاع کی میں تو ثابت کرو کہ جب

(۴) ایسی باتوں کے ذریعہ سے جو پہلے سوال میں بیان ہوئیں ہیں اول دفعہ ۴۴

(۵) ثابت کرو کہ حجم ۱ - بجم ب = مساوات عمود کی نقطہ سے اوپر ہے

(۶) اسے دوسرا دعویٰ دفعہ ۴۴ کا ثابت کرے۔

(۷) اگر مثلث اب س کی زاویوں اب و س کی مقابل کے اضلاع کا طول ط و ط ی

وطن سے توفیق ثابت کرو کہ

وہ جس پر واجب ہو وہ
 ہر جم - بجم + طے (جب بجم) = جب لجم

مساوات اوس خط کی ہی جواب کی تصنیف کرتا ہی اور اوس پر عمود ہی اور یہ مساوات اس طرح ہی لکھتے

$$(ھ + \frac{\text{طاحب ب حب س}}{\text{ح حب ا}}) \text{ حم ا} - (ا + \frac{\text{طاحب س حب ا}}{\text{ح حب ب}}) \text{ حم ب} = ۰$$

(۱) اسے تیسرا دفعہ ۴۲ کا ثابت کرو

(۹) مساوات طالعہ طب ب = . کی معنی میں کرو

(۱۰) ثابت کرو کہ طابہ + طب ب طس = . مساوات اور خط کی ہی جو نقاط وسط

اس اور پس میں ملائیں

(۱۱) اسے بس پر اور بسے اس پر نمود نکالے گئے ہیں تو ثابت کر دو کہ جو ان نمودوں کے مقلد ہیں:

نقطہ وصل کیا جا گیا اور سکی مساوات $\frac{1}{2} \text{ حجم } A + \frac{1}{2} \text{ حجم } B = \text{ حجم } C$ ہوگی

(۱۲) اگر ایک مثلث کے داخلی اور خارجی زاویے خطوط سے تقصیف کئے جائیں تو یہ خطوط

چار نقاط پر علاوہ مثلث کے زاویوں کے ملنے

(۱۳) اگر $u = 0$ ، اور $v = 0$ ، مساواتیں تین خطوط مستقیم کی ہوں تو مساوات

اوس خط کی دریافت کرو جو دو نقطوں پر گزرے $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

(۱۷) مساوات خط ستقیم کی دریافت کرو جو ان خطوں میں سے دو کی نقطہ تقاطع پر گزرے۔

۱۲ نو + بمو + اس می = . بمو - س می = .

(۱۵) اگر $h = 0$ ، اور $b = 0$ ، اور $a = 0$ ، مساوات اضلاع مثلث اور

ثابت کرو کہ مثلث کے دائرہ اندرونی اور سرون کے مرکزوں میں جو خط وصل کما کا ہی اوسے

Handwritten musical notation on a staff.

صہ (جم ب - جم س) + ب (جم س - جم ل) + س (جم ل - جم ح) =
(۱۶) اگر اضلاع مثلث کی یہ مساواتیں ہوں کہ یو = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰ اور اضلاع
ا ب س کی یو = طار مو = طب وی = طس تو نو ل و ب ب و س س ایک نقطہ پر
(۱۷) اگر خطوط ل و ا و ب ب و س س آخر مثال میں اضلاع مثلث ا ب س سے نقاط دی و ف پر
طیں تو ثابت کرو کہ نقاط تقاطع دی اور ا ب کی اوری و اور ب س کے اور ف داور س ل
کے سب ایک خط مستقیم میں واقع ہوں گی اور یہی خاصیت اون نقاط تقاطع میں ہوگی جو اضلاع
مثلث ا ب س سے طیں

(۱۸) دفعہ ۶ میں فرض کرو کہ خط جوف اور ح میں ملایا جا وہ ا ب سے نقطہ بر اور س کے
نقطہ ق پر ملتا ہی تو مساواتیں س ع اور د ع اور ل ق اور ب ق کی موافق طریقہ ثبات ا ق
دفعہ مذکور دریافت کرو

(۱۹) مثلث کے اضلاع کے نقاط وسطی عمود او بیہ نکلے گئے ہیں اور اسکے سب کیا تو
اندر میں یا سار کے سار یا بر مثلث کے اور اضلاع مثلث کی متناسب ہیں تو ثابت کرو کہ اگر ان
عمودوں کے اطراف اور مقابل کے زاویوں میں خطوط مستقیم وصل کے جائیں تو وہ ایک نقطہ پر
(۲۰) فرض کرو کہ ذوار ربعہ الاضلاع کے تین وتر خارج ہو کر ایک دوسرے سے تین نقطوں پر
اور ہر نقطہ اور ذوار ربعہ الاضلاع کے مقابل کے دونوں نوں میں خطوط وصل کے جائیں تو ایسے
چہ خط کچے کئی تین آئیں چار نقطوں پر

(۲۱) مثال گذشتہ میں جو شکل بنائی جائی اور او میں جو خطوط ذوار ربعہ الاضلاع کے ایک کو
ملای جائیں او میں یہ علاقہ ہوگا کہ دونوں او میں سے متوازی اضلاع مثلث کی ہوں گے اور
دونوں میں سے کسی متوازی الاضلاع کے دو قطروں کے متوازی ہوں گے
(۲۲) ثابت کرو کہ متین نقاط کے جو سوالات (۱۶) و (۱۷) و (۱۸) میں دریافت ہوئی اور مستقیم

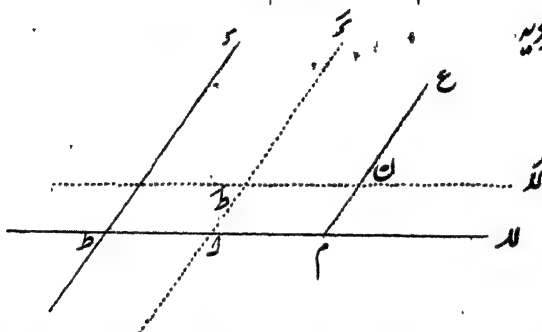
صہ جب اوج (ب س) + باب بجم بعب (س - و) +
 (۲۴) سطح ہستی مثلث لب س میں کوئی نقطہ نہ مقرر کیے کوئی نقطہ اوب و س سے خطوط اوس
 نقطہ تک پہنچاؤ اور انکو خارج کرو کہ مقابل کے اضلاع کو یا اضلاع محدودہ کو نقاط اوب و س پر تقاطع کریں
 اور فرض کرو کہ لب س اور لب س خارج ہو کر نقطہ ابر اور س اور لب س اور لب س پر نقطہ ب پر اور لب و لب
 نقطہ س پر ملتے ہیں تو ثابت کرو نقاط اوب و س ایک خط مستقیم میں ہونگے اور یہ بھی ثابت کرو کہ خطوط
 مستقیم ب اور س س اور لب و لب ایک نقطہ پر ملتی ہیں اور اس س اور لب و لب اور لب ب
 بھی اور لب و لب ب و س س بھی

(۲۵) میں نقطہ اوب و س مثلث کے اضلاع ب س و س و لب میں ہیں اور انہیں خطوط
 ملائی گئی ایک اور مثلث بناتی ہیں جسکی کوئی سے دو ضلع برابر ہوں گے مثلث اول کے اوب و لب پر
 بناتی ہیں جیسے کہ وہ ملتی ہیں تو ثابت کرو کہ لب و لب و س س عمود ب س و س و لب پر ہیں
 (۲۶) لب س ایک مثلث ہی اور مرکز دائرہ اندرونی مثلث کا ہی اور مرکز دائرہ خارجی مثلث
 کا جو ب س کو مس کرتا ہی اور خط ط کا ب س سے نقطہ دیر ملتا ہی اور ایک خط نقطہ دسی کہنچا گیا
 اس سے نقطہ ی پر اور لب سے نقطہ ف پر ملتا ہی اور خطوط ط و اور ط ی نقطہ ی پر اور
 خطوط ط ی اور ط و نقطہ ی پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ د و و ق ایک خط مستقیم میں واقع
 ہوتے ہیں جو عمود ط و ط پر ہے

باب پنجم محدورین کی تبدیل ہوتی

(۶۹) ہم اوپر کی دفعات میں بیان کر آئی ہیں کہ تمام مساواتیں خط مستقیم کی اس صورت کی ہے
 ہوتی ہیں کہ $d = m + n$ لیکن یہ صورت نہایت سادہ اور آسان بعض صورتوں میں ہو جاتی
 مثلاً اگر مبداء و خط پر ہو تو مساوات یہ ہو جاتی کہ $d = m$ لا اور اگر محور منطبق خط پر ہو تو
 $d = 0$ اور علیٰ ہذا اقسام مساوات کسی خط منحنی کی نہایت مختصر اور سیدھی سادہ ہوتی

مقامات مبداء اور سمت محور کی ہو جاتی ہے اس واسطے آسانی کے واسطے اس باب میں اسے
مقامات داخل کرتے ہیں کہ جنکی سمتیں یہ بات حاصل ہو جائیگی کہ جب محدودین ایک نقطہ سے
بلحاظ ایک مبداء اور محور کے معلوم ہوں تو ہم اسی نقطہ کے محدودین بلحاظ دوسرے معلوم
مبداء اور محور کے دریافت کر لیں اور یہ مقامات ایسی ہیں کہ باب اول کے ان زمین ہی لکھی گئی تھیں
اسلئے کہ کوئی نتیجہ انہیں باب اول ہی آگے کے بابوں کا کام میں نہیں آیا
(۸۰) محدودین کے مبداء کا مقام بغیر اس کے کہ تمام محوروں کی تبدل ہو بدل دو اور محور خواہ قائم الزاویہ
ہوں خواہ غیر قائم الزاویہ



فرض کرو کہ ط لا اور ط اصل محور ہوں اور ط لا و ط ز ایسے جدید محور ہوں کہ ط لا متوازی ط لا
اور ط ز متوازی ط لا ہو اور ط کے محدودین ح اور ق بلحاظ ط کے ہوں اور ع ایک نقطہ
ہو جس کے محدودین بلحاظ قدیم پہلے محور کے لا و د ہوں اور بلحاظ جدید محور کے لا و ز ہوں
فرض کرو کہ ط لا خارج ہو فی ط لا کو نقطہ ل پر قطع کرتا ہی اور ع متوازی ط لا کا ہی جو
ط لا سے نقطہ ن پر ملتا ہے تو

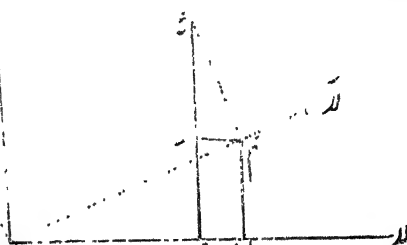
$$\text{ط لا} = \text{ح اور ل ط} = \text{ق}$$

$$\text{لا} = \text{ط م} = \text{ل م} + \text{ط ن} = \text{ل} + \text{ط لا} = \text{ل} + \text{ح}$$

$$\text{ز} = \text{ع م} = \text{ع ن} + \text{ن م} = \text{ع ن} + \text{ل ط} = \text{ز} + \text{ق}$$

پس اس طرح قدیم محدودین جدید محدودین کے رقومین میں بیان ہو گئی ہیں

(۸۱) سمتیں محوروں کی بدل دو اور مبداء کو نہیں بدلو اور دونوں حالتوں میں محور قائم الزاویہ



فرض کرو کہ ط لہ اور ط و قدیم محوروں اور ط لہ و ط و جدید محوروں اور دونوں صورتوں میں
اور فرض کرو کہ زاویہ لا ط لہ = ر اور ایک نقطہ ہی جس کے نزدیکین بلحاظ قدیم محوروں لا و
میں اور بلحاظ جدید محوروں کے لہ و مین سے م متوازی با و کا اور ع م متوازی با و کا اور م
متوازی ط و کا اور م متوازی ط لہ کا نکالو

$$\begin{aligned} \text{لا} = \text{ط م} = \text{ط ن} - \text{م ن} &= \text{ط ن} - \text{م ر} \\ &= \text{ط م} - \text{جم لہ لا} - \text{ع م جیب م ع} \\ &= \text{لا جم ر} - \text{جیب ر} \end{aligned}$$

$$\text{اور د} = \text{ع م} = \text{ر م} + \text{ع ر} = \text{م ن} + \text{ع ر}$$

پس قدیم محدودین ع کے جدید محدودین کے ر قون میں بیان ہو گئی

(۸۲) دفعہ گذشتہ میں رکھو کہ ایک مثبت حصہ کی طرف سے د کی مثبت حصہ کی طرف سے
کیا ہی اس وقت اگر کسی شال میں جو جبر یہ مذکورہ بالا کام میں لائیں اور ط لہ دوسری طرف ط لہ
واقع ہو تو اس وقت رکھو منفی خیال کرنا چاہئے۔ صورت جبر یہ دفعہ مذکور سے ہم دیکھتے ہیں کہ

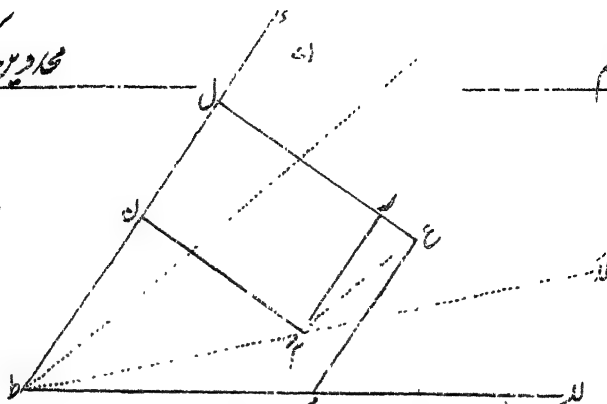
$$\text{لا} + \text{ر} = \text{لا} + \text{ر}$$

اور ایسی حالت بیشک ہونی چاہئے اس لئے کہ فاصلہ ط و دونوں صورتوں میں محور کے ایک ہی ہے

(۸۳) پیچیدہ کے بدلنے کے محوروں کی سمتوں کو بدل دو اور محور دونوں صورتوں میں محور ہیں

فرض کرو کہ ط لہ اور ط و قدیم محور ہوں اور ط لہ اور ط و جدید محور ہوں

اور (لہ و) زاویہ درمیانی ط لہ اور ط و کو تعبیر کرتا ہی اور اس طرح اور زاویہ جو
نقطہ ط پر ہے میں تعبیر ہوتی ہیں اور ع ایک نقطہ جس کے محدودین لہ و ط لہ ط قدیم



محوروں کے اور لکڑے بلحاظ جدید محورین کے ہیں ع م متوازی ط و کا اور ع م متوازی ط و کا
اور ع اور م سے ل اور م ن عمود ط پر کچھ اور م سے م عمود ل پر نکالو تو

$$\begin{aligned} \text{اب ع ل} &= \text{عمود کے جو م سے ط پر نکال جائے} = \text{لا جب (لدی)} \\ \text{اور نیز ل} &= \text{ر ل + ع ر} = \text{م ن + ع ر} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \text{ط م جب ل ل ط + ع م جب و ط و} \\ &= \text{لا جب (لدی) + و جب (و ک و)} \\ &\therefore \text{لا جب (لدی)} = \text{لا جب (لدی) + و جب (و ک و)} \quad (۱) \end{aligned}$$

علیٰٰذا القیاس ع اور م سے عمود ط ل پر نکالنے سے ہم ثابت کر سکتے ہیں

$$\text{ر جب (لدی)} = \text{لا جب (لدی) + و جب (و ک و)} \quad (۲)$$

ساوات (۱) و (۲) میں قدیم محدودین جدید محدودین کی رقموں میں بیان کی گئی ہیں

(ر ل ل) اور (لدی) ایک ہی زاویہ کو تعبیر کرتے ہیں لیکن ہم ان جملوں کو زیادہ قرینہ کے ساتھ

کام میں لائے ہیں

فرض کرو کہ لا ط ل = ہ و اور ل ط و = ب اور لا ط و = د و مساوات (۱) و (۲) کے یہ

$$\text{لا جب د} = \text{لا جب (د-ہ) + جب (د-ب)} \quad (۳)$$

$$\text{ر جب د} = \text{لا جب ہ + و جب ب} \quad (۴)$$

(۸۴) دفعہ گذشتہ کی دو خاص صورتیں بیان کی جاتی ہیں

اگر اصل محور قائم الراویہ ہوں تو د = ک = تو مساوات (۳) اور (۴) اس صورت کی ہو جائیگی

$$لا = لا جم هه + ز جم ب$$

$$د = لا جم هه + ز جم ب$$

اگر نئی محور قائم الراویہ ہوں تو ب = ک = هه اور مساواتین (۳) اور (۴) کی یہ ہو جائیگی

$$لا جم د = لا جم (د-هه) - ز جم (د-هه)$$

$$ز جم د = لا جم هه + ز جم هه$$

(۱۵) ہم دونو محور اور مبدی کو تبدیل کرنا چاہتے ہیں تو کسی نقطہ کے لادو محدّین بلحاظ قدیم محوروں کے اور لادو کو اسی نقطہ کے محدّین بلحاظ جدید محوروں کے مقرر کر دے۔ ۱۸۰ اور ۱۳۵ کی ہر صورت میں

$$لا = لا + ج$$

$$د = د + ج$$

جسمین ج اور قی محدّین مندرجہ بالا کے بلحاظ قدیم محوروں کے ہیں اور

$$لا = لا جم (د-هه) + ز جم (د-هه)$$

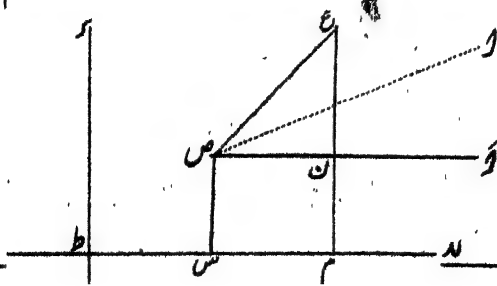
$$د = لا جم هه + ز جم ب$$

اور جب لا د کے مختصر اور مفرد بن سکتی ہیں جب محور ایک نظم یا دونو نظموں میں قائم الراویہ ہوں

(۱۶) قائم الراویہ اور قطبی محدّین کے مربوط ہونی کی یہ ایک خاص صورت بیان ہوئی ہے کہ دونو نظموں میں مبدی ایک ہو اور محور لا کا ابتدائی خط پر منطبق ہو دفعہ ۸ کو دیکھو اب ہم اس کا بیان علیٰ عام صورت میں

ایک نقطہ کے قطبی اور قائم الراویہ محدّین کو آپس میں مربوط کرو

فرض کرو کہ ط لا اور ط د قائم الراویہ محوروں اور ص قطب ہو اور ص لا مقام ابتدای اوج اور قی



باب چہم ۷۳ محدین کی تبدل نسبت سے مقرر کرو

محدین میں کے لمجاط کے فرض کرو اور ص لا تنوازی ط لا کا نکالو اور زاویہ اص لا = ۷۰
فرض کرو ع ایک نقطہ ہی جسکی محدین لمجاط قائم الزاویہ محورون کے لا و میں اور ق اور ر اور س
قطبی محدین میں ع م اور ص میں تنوازی ط و کے کچھ حصین سے ع م کو ص لا نقطہ ن پر قطع کر
اور ملاؤ ص ع تو

$$\begin{aligned} \text{لا} &= \text{ط م} & \text{ع} &= \text{م} \\ \text{ن} &= \text{ص لا} & \text{ر} &= \text{زاویہ اص لا} \\ \text{اور لا} &= \text{ط س} + \text{س م} & \text{ح} &= \text{ط س} + \text{ص ن} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{س م} + \text{ن ع} &= \text{ص س} + \text{ن ع} \\ \text{ق} + \text{ق جب} &= \text{ر} + \text{ھ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اگر ھ} &= ۰ \text{ تو لا} = \text{ح} + \text{ن ح م ر} \\ \text{د} &= \text{ق} + \text{ن خ ر} \end{aligned}$$

(۸۷) اس باب میں جو صورت قانون بیان ہوئیں ہیں اونکی وساطت بعض اوقات مساوات کی صورت کو مختصر اور سادہ بنا سکتے ہیں مثلاً محور قائم الزاویہ ہوں اور یہ مساوات ہو کہ

لا + ۲ + ۶ لا + ۲ = ۲
اس مساوات سے بعض مقام النقاط تعبیر ہوتی ہیں اور لا کی مختلف قیمتوں کے لگاتار سے کی
قیمتیں موافق لا کی قیمتوں کے معلوم ہوتی ہیں اور اسے مقام النقاط کے نقطے جنی جانیے ہیں
کرتے ہیں۔ لیکن اس مساوات کی صورت نہایت سیدھی سادی طرح ہو سکتی ہے کہ محورون کو
پلٹ کر ۷۰ کے زاویہ پر لا والین۔ دفعہ ۸۱ کی صورت میں ر کی جگہ ۷۰ لکھو

$$\text{لا} = \frac{\text{لا} - ۲}{۳} \text{ اور } \text{ر} = \frac{\text{لا} + ۲}{۳}$$

$$\begin{aligned} \text{ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں لکھو} \\ ۸ = (\text{لا} + ۲) + (\text{لا} - ۲) + ۶ \\ ۸ = (\text{لا} + ۲) + (\text{لا} - ۲) + ۶ + ۶ \\ ۸ = ۲\text{لا} + ۶ \end{aligned}$$

(۳) پربت (۱) کے زیادہ سیدھے صورت میں اسلئے مقام النقاط کا دریا
مساوات (۳) سے اور جدید محورون کی استعانت سے پربت قدیم محورون کے سہل

طالب علم اس بات کو خوب سمجھ لو جب کہ محوروں کے بدلنے سے کچھ مقامات نقاط نہیں بدلتا یعنی مساوات (۱) انہیں نقاط کی اجتماع کو تعبیر کرتی ہی جنکو (۳) تعبیر کرتی ہی مثلاً نقطہ ج کے لاء = ۱۰ اور ۲۰ = محاورین میں بظاہر مقامات نقاط (۳) پر واقع ہی اب موافق (۲) کے اسی نقطہ کے محاورین میں

قدیم محوروں کے یہ ہیں $\frac{1}{4} = ۱۰$ اور $\frac{1}{4} = ۲۰$
اور یہی قیمتیں (۱) کے شرائط کو پورا کرتی ہیں یعنی یہ نقطہ مقامات نقاط (۱) پر واقع ہی ہو سکتے ہیں بات قابل کہنے ہے کہ جب ہم محاورین کو بدلتے ہیں تو اس سے مساوات کے درجہ کو نہیں بدل سکتے اس واسطے کہ اگر پہلے لاء = ۲۰ میں بجای لاء اور ۲ کے قیمتیں جو لاء کے رقموں میں بیان کی گئی ہیں بوجب دفعات ۸۰ و ۴۰ کے لکھیں تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$(۱) (۱۰ + ۲۰ + ۳۰) = (۱۰ + ۲۰ + ۳۰) \quad (۲) (۱۰ + ۲۰ + ۳۰) = (۱۰ + ۲۰ + ۳۰)$$

اس میں لاء و ۲۰ و ۳۰ کی وجہ سے مقامات مستقل ہیں جب ان جملوں کو پہلا کر لکھیں گے تو ہم ایک سلسلہ ارقام میں اس صورت لاء = ۲۰ کا دریافت کریں گے جس میں ۲۰ سے زیادہ نسبت ۲۰ + ۳۰ کے انہیں ہوگا اسے معلوم ہوگا کہ بہت محاورین کی تبدیلی ہونے سے مساوات کا درجہ نہیں بڑھ سکتا اور نہ کوئی درجہ مساوات کا گھٹ سکتا ہی اسلئے کہ اگر بہت سے تبدیلی ہوتی ہے درجہ کسی مساوات کا گھٹ جائی تو جو مساوات گھٹی ہوئی درجہ کی حاصل ہوگی اس پر عمل معکوس کرنے سے وہی مساوات حاصل ہو جائیگی جس کا درجہ گھٹا یا تھا اب اس گھٹی ہوئی درجہ سے مساوات کا درجہ بڑھ گیا اور یہ پہلے ہم ثابت کر چکے ہیں کہ درجہ بڑھ نہیں سکتا اسلئے ثابت ہوگا کہ درجہ گھٹ بھی نہیں سکتا

مثالیں

- (۱) مساوات $۱۰ = ۲۰$ کا ہم ۲ کو ایک ایسی مساوات میں تبدیل کر دو کہ جو لاء اور ۲ کے درمیان
- (۲) ثابت کر دو کہ مساوات $۱۰ = ۲۰$ لاء = ۲۰ لاء لاء مساوات لاء = ۲۰ لاء کی صورت ہو جائیگی
- اگر محور پلٹ کر ایسی ہو جائیں کہ دونوں کے درمیان کا زاویہ ایسا ہو جس کا ۲ اس ۱۰ کی
- (۳) لاء + ۲۰ = ۳۰ کی صورت ایسی بدل دو کہ اصل محور پر ۲۰ کا میل

(۴) بلحاظ محور قائم الزاویہ کے مساوات ایک خط ممحی کی $ز + ب + د + م = ۴ - ۴ = ۰$

اوسکی مساوات بلحاظ محور محرف کی دریافت کرو جو محور لایر زاویہ کا میل رکھی کے
(۵) ثابت کرو کہ مساوات $لا = ز = (لا + ز)$ بلحاظ $ز$ کے حل ہو سکتی ہے اگر محور $لا$ سے زیادہ

کے درمیان حرکت کریں

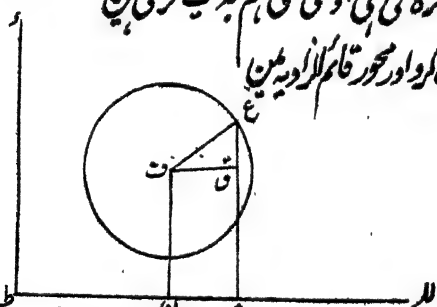
(۶) لا اور د محدودین ایک نقطہ کے بلحاظ ایک محرف محورون اور لا $د$ بلحاظ دوسرے محرف

محورون کے ہون اور $لا = م لا + ن د$ اور $د = م لا + ن د$
تو ثابت کرو کہ $\frac{م}{ن} = \frac{۱ - ۲}{۱ - ۲}$

باب ہشتم

(۸) اب ہم اول مقام النقطہ کا ذکر کریں گے جنکی مساواتیں درجہ دوم کی ہیں انہیں سے زیادہ سہل

سادہ مساوات دائرہ کی ہی اوسی سی ہم بدلت کرتی ہیں
مساوات دائرہ کی دریافت کرو اور محور قائم الزاویہ میں



فرض کرو کہ ف مرکز دائرہ کا ہی $ع$ کوئی نقطہ اوسکی محیط میں ہے اور س نصف قطر دائرہ کا ہی اور
لا و ب محدودین $ف$ کے ہیں اور لا و ب محدودین نقطہ $ع$ کے ہیں $ف$ $ن$ اور $ع$ $م$ متوازی $د$ اور
طا کے نکالو تو $ق = ع ق + ف ع$

(۱) یعنی $(لا - ط) + (د - ص) = س$

(۲) $لا + د - ۲ ط - لا - م ص + د + ط - ص = س = ۰$

یہ مساوات مطلوب ہے

اس مساوات میں تبدلات ذیل واقع ہوتے ہیں

اول فرض کرو کہ سب محدودین مرکز پر واقع ہو تو $ط = ۰$ اور $ص = ۰$ پس

(۱) اور (۲) یہ ہو جائیگی کہ

$$لا + ز - س = ۰ \quad (۳)$$

دوم فرض کرو کہ اصل محیط دائرہ پر واقع ہو تو قیمتیں لا = ۰ اور ز = ۰ مساوات (۲) (۱) کی شرائط کو پورا کر لگی

$$اسی واسطے لا + ص - س = ۰ جب ط محیط پر واقع ہو تو$$

یہہ ارتباط شکل سے صاف ظاہر ہے اسے ثابت ہوا کہ مساوات (۲) کی یہ شکل ہو گی

$$لا + ز - ۲ - ط لا - ۲ ص ز = ۰ \quad (۴)$$

سوم فرض کرو کہ مبدیہ محیط دائرہ ہو اور قطر جو مبدیہ گزرتا ہی محور لا منفر کیا جاتا تو ص = ۰ اور ط = س اس سبب مساوات (۲) یہ ہو جائیگی کہ

$$لا + ز - ۲ - ط لا = ۰ \quad (۵)$$

اس طرح اگر مبدیہ محیط دائرہ ہو اور قطر جو مبدیہ میں گزرتا ہی محور لا منطبق ہو تو

$$ط = ۰ اور ص = س اس سبب مساوات (۲) یہ ہو جائیگی کہ$$

$$لا + ز - ۲ - ۲ ص ز = ۰ \quad (۶)$$

پس معلوم ہوا کہ مساوات (۲) سے یہ نتیجہ نکل سکتا ہی کہ جب محور قائم الزاویہ ہوں تو ہمیشہ مساوات دائرہ کی اس صورت کی ہو گی

$$لا + ز + لا + ب + ز + ح = ۰$$

اس میں لا و ب و س متغیر مستقل میں ایک یا کئی اور نہیں سے خاص صورتوں میں وضع کی

(۸۹) بالعکس کے اگر مساوات یہ ہو کہ لا + ز + لا + ب + ز + س = ۰ تو اس کا

مقام النقاط ایک دائرہ ہو گا - مساوات (۱) اس طرح لکھی جاسکتی ہی کہ

$$(لا + \frac{ز}{س}) + (ز + \frac{لا}{س}) = \frac{لا + ز}{س} - س \quad (۲)$$

اول اگر لا + ب - س منفی ہو تو مقام النقاط ہی ناممکن ہو جاتا ہے

دوم اگر $\alpha + \beta = \mu$ - تو مساوات (۲) ایک نقطہ کو تعبیر کرتی ہے جسکی محدین
 - $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$ - اس نقطہ کو ایک دائرہ خیال کر سکتی ہیں جسکا نصف قطر لا انتہا چھوٹا ہی
 سوم اگر $\alpha + \beta = \mu$ - من مثبت ہو تو ہم مساوات (۲) کو دفعہ بالا کی مساوات (۱) کے ساتھ
 متبادل کر کے کہہ سکتی ہیں کہ وہ ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہے جسکی مرکز محدین - $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$ - ہیں اور
 نصف قطر $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ (۳) - یہی شق نہایت فائدہ مند ہوگی اگر کوئی مساوات اس شکل
 کی ہو کہ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ - تو اسے دائرہ بناوین شکل مساوات یہ ہے کہ

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0$$

$$\text{یا } (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = -\epsilon = 14 + \mu + 5 = 25$$

پس اسے معلوم ہوا کہ مرکز کے محدین ۲ و ۴ ہیں اور نصف قطر ۵ ہے

ماس اور عمود الماس

(۹۰) حد اگر نقطہ ایک خط منحنی پر لئے جائیں اور انہیں خط قاطع المنحنی کچلا جائے اول نقطہ قاطع
 اور اس جگہ سے اپنی پہلی اور دوسرا نقطہ خط منحنی پر اول نقطہ تک متحرک ہو تو خط قاطع اس اپنی
 محدودہ مقام میں ماس خط منحنی کا اول نقطہ پر کھل جائیگا

(۹) دائرہ کے کسی نقطہ سے جو ماس نکالا جائے اسکی مساوات دریافت کرو
 فرض کرو کہ مساوات دائرہ کی یہ ہو کہ

$$\alpha + \beta = \mu$$

اور لہذا محدین اس نقطہ کے جن سے ماس کچلا گیا ہے اور لہذا اور نقطہ متصلہ کے محدین
 ہیں تو مساوات خط قاطع کے جو نقاط (لڈ و) و (لڈ و) پر گذرنا ہی یہ ہوگی

$$\alpha - \beta = \mu - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (۲)$$

اب چونکہ (لڈ و) اور (لڈ و) دونوں نقطے محیط دائرہ پر ہیں اسلئے

$$\alpha + \beta = \mu$$

$$\alpha + \beta = \mu$$

$$\text{اسیوا قیمتوں کے رکھنے سے } \alpha - \beta + \alpha + \beta = \mu - \mu = 0$$

$$\text{یا } (\alpha - \beta) + (\alpha + \beta) = (\mu - \mu) = 0$$

پس ساوات (۲) سطح لکھی جاسکتی ہے کہ

$$\frac{ل_۱ + ل_۲}{ل_۱} = \frac{ل_۲}{ل_۱} \quad (۲)$$

$$\frac{ل_۱ + ل_۲}{ل_۱} = \frac{ل_۲}{ل_۱} \quad (۳)$$

لیکن اس حد میں کہ (ل_۱ و ل_۲) منطبق (ل_۱ و ل_۲) کے ساتھ ہوتا ہے، ہماریہ حاصل ہوتا ہے کہ ل_۱ = ل_۲

گ = د ہے مساوات (۳) یہ ہو جائیگی

$$\frac{ل_۱ + ل_۲}{ل_۱} = \frac{ل_۲}{ل_۱} \quad (ل_۱ - ل_۲)$$

پس مساوات ماس کی نقطہ (ل_۱ و ل_۲) پر یہ ہوگی کہ

اس مساوات کو د میں ضرب دینے سے اور منتقل کرنے سے یہ صورت ہو جائیگی

$$\frac{ل_۱ + ل_۲}{ل_۱} = \frac{ل_۲}{ل_۱}$$

(۹۲) مساوات ماس کی نہایت آسانی سے اس زاویہ کی ماس کی رقوم میں لکھی جاسکتی ہے جو خط محور سے بناتا ہے اس واسطے کہ مساوات ماس (ل_۱ و ل_۲) کی یہ ہے

$$\frac{ل_۱ + ل_۲}{ل_۱} = \frac{ل_۲}{ل_۱}$$

فرض کرو کہ - $\frac{ل_۱}{ل_۲} = \frac{ل_۲}{ل_۱}$ م پس مساوات یہ ہو جائیگی کہ

پس $\frac{ل_۱}{ل_۲} = \frac{ل_۲}{ل_۱}$ کو ماس کی رقوم میں بیان کرنا باقی رہا

$$\frac{ل_۱}{ل_۲} = \frac{ل_۲}{ل_۱} \quad \text{اور} \quad \frac{ل_۱}{ل_۲} = \frac{ل_۲}{ل_۱} \quad (۱+۲) = ۳$$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات ماس کی سطح لکھی جاتی ہے

$$\frac{ل_۱ + ل_۲}{ل_۱} = \frac{ل_۲}{ل_۱}$$

بالعکس کے جو مساوات اس صورت کی ہوگی وہ ماس دائرہ کی ہے

(۹۳) دفعہ ۹۰ کی حدود کو شاید طالب علم یہ کہیگا کہ اقلیدس کی تعریف کیونچہ چوڑا کر ایک نئی تعریف اپنی دل سے گہری ہی تو اس کا جواب یہ ہے کہ اقلیدس کی تعریف مخصوص دائرہ کے ساتھ ہے اور دفعہ ۹۰ کی تعریف علی العموم بن خط منحنی کے ماس کے واسطے ہے۔

اول کسی حدود برطالع علم راغنی کا مجاز نہیں ہے وہ نہیں ہو سکتا کہ کوئی ایسا بنایا ہی اور اسے کیا نفع نکلتا ہے اور اس میں کیا خصوصیت ہے یاں جب وہ آگے بڑھی اور نتائج حدود کو دیکھے کہ کیا نکلتے ہیں اور اس سے مقدمات کس طرح مرتب ہوتی ہیں تو البتہ اس وقت رای دینی کا مجاز ہے اگر کسی خط کی مساوات

للا + ز = س (۱) ہو
تو ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں کہ وہ بموجب حدود اقلیدس کے دائرہ کو مس کرتا ہے

للا + ز = س (۲) ہو
فقطہ (لاؤر) کو فرض کرو کہ دائرہ پر واقع ہے۔ ایک نقطہ یا نقطے تقاطع خط اور دائرہ کے درمیان

کرنے کے لئے مساواتیں (۱) اور (۲) کو مرکب کرتی ہیں اور (۲) میں ہم قیمت کی (۱) سی دیا

کر کے لکھتے ہیں تو
یا لا (لاؤر + ز) - ۲ س لاؤر + س - س ز = ۰

س لاؤر - ۲ س لاؤر + س لاؤر = ۰

لاؤر - ۲ لاؤر + لاؤر = ۰

لاؤر = لاؤر

ساوات (۱) سے ز = س
اسے معلوم ہو کہ (۱) اور (۲) دونوں نقطہ ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں اور وہ نقطہ لاؤر ہی

پس یہ ثابت ہے کہ (۱) دائرہ کو بموجب حدود اقلیدس کے ایک ہی نقطہ پر مس کرتا ہے
(۹۸) یہ خط جو دائرہ سے صرف ایک ہی نقطہ پر ملتا ہے صرف ماس ہی دائرہ کا ہوتا

اس واسطے کہ فرض کرو
لاؤر + ز = س

ایک دائرہ کی مساوات ہو اور

ساوات ایک خط استقیم کی ہو اب دائرہ اور خط کے نقاط تقاطع دریافت کرنے کے لئے ہم مساوات کو شامل کرتی ہیں تا اس طرح ہر نقطہ کی محدودیتیں کر نیکی واسطی یہ حاصل ہوگا

(م لاؤر + ن) + لاؤر = س

یا (م + ن) لاؤر + م ن لاؤر + ن - س = ۰

اب اس مساوات کی دو قیمتیں ہونگی الا اس صورت میں کہ

$$(m+1)(n-1) = m \cdot n$$

یعنی جب $n = (a + m)$ ہو تو وہ نقطوں پر گانت طیکہ اوٹیکٹ شرط مذکور نیائی جا
اسے ثابت ہوا کہ اگر خط تقیم دائرہ سے ملتا ہی تو وہ نقطوں پر گانت طیکہ اوٹیکٹ شرط مذکور نیائی جا
تو مجموعہ دفعہ ۹۲ کے یہ خط تماس دائرہ کا ہوا

(۹۵) دائرہ پر جو نقطہ قائم دفعہ ۹۰ میں بیان ہوئی ہیں اور اس میں ایک نقطہ قائم کیا ہی اور دوسرا متحرک کیا ہی اگر گجائی ایک نقطہ کے متحرک ہونیکے دونوں نقطہ ایک دوسرے کی طرف دائرہ پر متحرک ہو کر ایک نقطہ پر ملجائیں تو خط قاطع ایسی مقام پر رودہ میں نقطہ قائم پر تماس ہوگا۔ اس واسطے کہ فرض کرو (لڈ وڈ) و (لڈ وڈ) دو نقطہ متحرک دائرہ پر ہوں اور (لڈ وڈ) نقطہ قائم ہو۔ تو ہر جب مساوات (۳) دفعہ ۹۱ کے مساوات خط قاطع کی یہ ہوگی

$$(\bar{u} - u) \frac{\bar{u} + u}{\bar{z} + z} = \zeta - \eta$$

پس مقام محدودین لا اور لگد میں ہر ایک = لا اور لا اور گریچ ہر ایک = دس بیس نقطہ
لا و ایرماس کی مساوات یہ ہوگی کہ $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ (لا-لا) اور یہ مطابق نتیجہ ہے

(۹۶) اگر دائرہ کی مساوات اس صورت

(ل-ط) + (و-ص) - س = مین معلوم ہو

فرض کرو کہ نقطہ (لہ دئے) دائرہ میں جو جبریر ماس کہا گیا ہے اور (لہ دئے) ایک متصل نقطہ

(ل-ط) + (ن-ض) =

$$(کَلَّ - ط) + (کَلَّ - ص) = س$$

$$= (\text{د} - \text{ط}) - (\text{ط} - \text{د}) + (\text{ز} - \text{ص}) - (\text{ص} - \text{ز})$$

$$(1) \quad = (4 - 3 + 3)(3 - 3) + (12 - 11 + 11)(11 - 11)$$

اور سوات خط قاطع کی (لہ و کھ) اور (لہ و م) پر گزرتا ہے

$$(2) \quad (11-11) \frac{3-3}{11-11} = 3-3$$

اور بواسطت مساوات (۱) کے یہ لکھا جاسکتا ہے کہ

$$(3) \dots\dots\dots (11-12) \frac{12-11+11}{\dots\dots\dots} = 1-1$$

باب ہشتم کہ اب حاضری کی حالت میں لاء لاء اور دے دے مساوات ماس نقطہ (لاء و دے) کی یہ ہوگی کہ

$$ر - دے = لاء - ط (لاء - لاء) \dots (۴)$$

اور یہ آسان طرح بھی لکھی جاسکتی ہے کہ

$$ر - ص - (دے - ص) = لاء - ط - (لاء - ط) \dots (۵)$$

(۹۷) حد خط بنی کے کسی نقطہ سے عمود اس ماس پر نکال دیا جائے جو اس نقطہ سے خط بنی کا کھینچا جائے تو اس عمود کو عمود الماس خط بنی کا کہتے ہیں

(۹۸) ایک دائرہ کے کسی نقطہ کی عمود الماس کی مساوات دریافت کرو

فرض کرو کہ مساوات دائرہ کی بیہ ہو کہ
اور جو نقطہ دائرہ پر لگایا ہی اوسکی محدب دین لاء و دے فرض کرو مساوات اس نقطہ کی ماس کی یہ ہوگی کہ

$$لاء + دے = س$$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات اوس خط کی جو (لاء و دے) سے عمود ماس پر جو یہ ہوگی کہ

$$ر - دے = لاء - ط (لاء - لاء)$$

چونکہ شرطیں اس مساوات کی ان تینوں سے کہ لاء = ۰ اور دے = پوری ہوتی ہیں تو اسے معلوم ہوا کہ عمود
مبدع میں یعنی مرکز میں دائرہ کے گزرتا ہے

(۹۹) دائرہ کے نقطہ بیرونی سے دو ماس نکل سکے ہیں

فرض کرو کہ مساوات دائرہ کی یہ ہو کہ

اور ح اور ق محدب دین کسی نقطہ بیرونی کے ہیں اور لاء و دے محدب دین اوس نقطہ کی فرض کرو جسے
نکال دیا گیا نقطہ (ح و ق) پر گزرتا ہی۔ مساوات ماس نقطہ (لاء و دے) کی یہ ہو کہ

$$لاء + دے = س$$

چونکہ یہ ماس نقطہ (ح و ق) پر گزرتا ہی اسلئے مساوات اوسکی یہ ہوگی کہ

$$ح + لاء + ق + دے = س$$

اور چونکہ (لاء و دے) دائرہ میں ہے

مساوات (۳) اور (۴) سے قیمتیں لادو کی متعین ہوتی ہیں (۳) کی قیمتیں (۴) میں لکھیں

$$ل = ق + س = س$$

$$ل = ق + س = س$$

اس مساوات درجہ دوم کی دونوں قیمتیں ملن میں چونکہ (ح اوق) ایک نقطہ بیرونی ہی اسلئے
ح + ق بڑا اس سے ہے قیمت لاکھ موافق قیمت کو کی (۳) کے ہی اسے معلوم ہوا کہ

دو تاس ہر دائرہ کے ہر نقطہ بیرونی سے کچھ سکتی ہیں

جن نقطوں پر یہ تاس دائرہ کو مس کرتے ہیں انہیں خط ملا یا گیا وتر تاس کہلاتا ہے

(۱۰۰) نقطہ بیرونی معلوم سے تاس ایک دائرہ کے کچھ گئے ہیں مساوات وتر تاس کی دریافت کرو

فرض کرو کہ ح اوق محدودین نقطہ بیرونی کے ہیں اور نقطہ ح اوق سے جو ایک تاس

نکالا گیا ایک نقطہ پریس کرتا ہی اوسکی اور لاد اور محدودین اور نقطہ تاس کے ہیں جسپر کہ

نقطہ ح اوق سے ایک تاس نکالا گیا دائرہ کو مس کرتا ہی اور لاد اور محدودین دوسرے

نقطہ کے ہیں جہاں دوسرا تاس نقطہ (ح وق) سے نکالا گیا دائرہ کو مس کرتا ہی

مساوات تاس (لاد و س) پر یہ ہوگی کہ

$$ل = ق + س = س$$

اور چونکہ تاس نقطہ ح وق پر گزرتا ہی اسلئے یہ مساوات حاصل ہوگی کہ

$$ح لاد + ق س = س$$

اور علیٰ ہذا القیاس تاس جو (ح وق) سے نکالا گیا ہی نقطہ لاد و س پریس کرتا ہی یہ

$$ح لاد + ق س = س$$

اسے یہ مستنبط ہوتا ہی کہ مساوات وتر تاس کی یہ ہے کہ

$$ل = ق + س = س$$

اسوئے کہ ظاہر معلوم ہوتا ہی کہ (۳) مساوات کسی خط مستقیم کی ہی اور یہ خط (لاد و س) ہے

کیونکہ (۴) کی شرائط ان قیمتوں سے پوری ہوتی ہیں کہ ل = لاد اور س = س اسلئے مساوات

(۲) کی دیکھ رہی ہی اور علیٰ ہذا القیاس مساوات (۳) سے یہ نتیجہ نکالتی ہیں کہ یہ خط

(لاد و س) پر گزرتا ہی۔ پس اسے ثابت ہوتا ہی کہ (۴) مساوات مطلوبہ ہے

باب ششم سے دائرہ کے ماس نقطہ بیرونی معلوم سے کچھ سکے ہیں کہ اول وہ خط ہے جو مساوی
(۸) سے تعبیر ہوتا ہے اور یہ نقطہ بیرونی اور اول نقطہ ان تین خط ملائیں جہاں وہ دائرہ سے

ملا ہے تو اس طرح جو خطوط حاصل ہو گئی وہ ماس مطلوب ہو گئی
(۱۰) دائرہ کے وتر ایک نقطہ معین سے کچھ گئے ہیں اور ان وتروں کی طرف سے ماس
نکلے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ ان ماسوں کی نقاط تقاطع کا مقام النقاط ایک خط مستقیم ہوگا
فرض کرو کہ ح اوقی محدود اس نقطہ کے ہیں جسے او تار کچھ گئے ہیں اور ان وتروں میں سے ایک وتر کے
طرف سے ماس دائرہ کے کچھ گئے ہیں اور لا دکر وہ نقطہ ہی جسے ماس ملتی ہیں تو مساوات وتر تاس

کی بموجب دضہ :۔ اسکے یہ ہو گئی کہ لا لا + دکر = س
لیکن یہ وتر (ح دق) پر ہی گزرتا ہی اسلئے

ح لا + ق د = س
اسے معلوم ہوا کہ نقطہ لا دکر اس خط پر واقع ہی کہ
لا ح + دق = س

یعنی مقام النقاط ماسوں کے نقطہ تقاطع کا ایک خط مستقیم ہے
اب ہم اس دعویٰ کا عکس ثابت کرتے ہیں

(۱۰۲) اگر ایک خط مستقیم کے کسی نقطہ سے دو ماس دائرہ کے کچھ جائیں تو او تار تاس ایک نقطہ ہیں
فرض کرو کہ لا لا + ب د + س =

مساوات ایک خط مستقیم کی ہی اور اس خط کا ایک نقطہ لا دکر ہی جسے ماس دائرہ کے کچھ گئی
تو ان ماسوں کے وتر ماس کی مساوات ہو گئی کہ

$$(۲) \quad لا لا + دکر = س$$

اور چونکہ لا اور دکر (۱) میں واقع ہیں تو

لا لا + ب د + س = س
اسو سے مساوات (۲) اس طرح لکھی جا سکتی ہے کہ

$$لا لا - دکر = س$$

$$(۳) \quad لا لا - دکر = س$$

اب خواہ کچھ ہی قیمت لا کی فرض کرو یہ خط اوس نقطہ پر گزرتا ہی جسے محدود ہیں ان

ساواتوں سے دریافت ہوتے ہیں کہ $ل = س - س$ اور $س = س + س$ ۔

یعنی نقطہ ج کے واسطے $س = س$ اور $ل = س - س$ ۔

(۱۰۳) طالب علم کو دیکھنا چاہیے کہ کیا مختلف معنی ساوات

لا $ل + س = س$ کے لگائی جاتی ہیں

نک

اول اگر (ح اور ق) کوئی سا نقطہ ہو تو ساوات اوس مقام انقاط کو تعبیر کرتی ہی جو

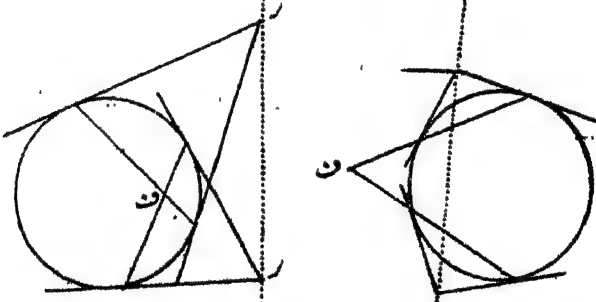
نقطہ تقاطع سے کہ وتر ماس کی اطراف سے نکالی جائیں نقطہ ح اور ق پر گذرتا ہی

دوم اگر (ح اور ق) نقطہ بیرونی ہو تو بموجب (۱۰۰) کے وہ دتر ماس کو تعبیر کر لگی

سوم اگر (ح اور ق) دائرہ بیرونی ساوات اوس نقطہ کے ماس کو بموجب دفعہ ۹۱ کے تعبیر کریں

اس شکل میں ف تعبیر کرتا ہی نقطہ (ح اور ق) اور

لا $ل + س = س$ خط رہی



اول شکل میں نقطہ ف دائرہ کی اندر ہی اسلٹی ر کے معنی فقط اول ہی لئے جاسکتی ہیں اور

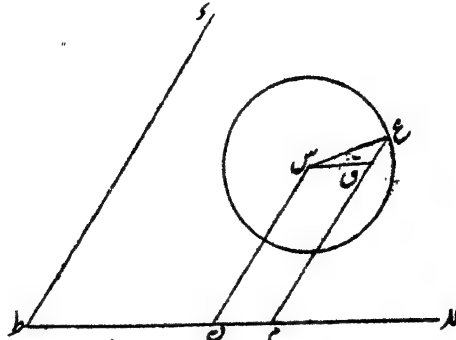
شکل میں ف باہر دائرہ سے واقع ہی اسلٹی ر کے دو معنی اول اور دوم لئے جاسکتے ہیں

اسی واسطے اگر ماس نقطہ سے دائرہ کے کچے جائیں تو وہ دائرہ سے اون نقطوں پر ملینگے

جہاں رر او سے تقاطع کرتا ہی

اگر ف دائرہ پر ہے تو رر ماس نقطہ ف پر ہوگا

محور غیر قائم الزاویہ یا محرف



فرض کرو کہ زاویہ دیرمخو را یک دوسرے کی طرف مائل ہوں اور س مرکز دائرہ اور ع ایک نقطہ اسکے
محیط پر اور س نصف قطر دائرہ کا اور ط و ص محدبین نقطہ س کے اور ل د و محدبین نقطہ ص کی ہیں
سن اور ع متوازی ط و کی اور س ق متوازی ط ل کے نکالو تو

$$س ع = س ق + ع و - س و = ع و + س ق + ص د$$

$$= س ق + ع و + س و + س ق + ص د$$

$$\text{یعنی (ل - ط) + (و - ص) + (د - ل) + (ط - و) + (ص - د) = س ق}$$

$$\text{یا ل + و + د + ل + و + د - س ق - ص - د - ل - ط - و - ص - د = س ق}$$

$$+ ط + و + ص + د - س ق = س ق$$

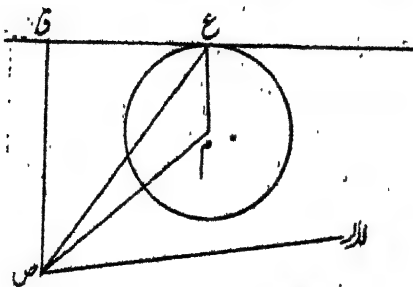
اسے معلوم ہوا کہ مساوات دائرہ کی بلحاظ محور و س کے اس شکل کی ہوگی

$$ل + و + د + ل + و + د - س ق - ص - د - ل - ط - و - ص - د = س ق$$

اس میں ل و ب و س مستقل مقادیر ہیں

قطبی مساوات

(۱۰۵) مساوات قطبی دائرہ کی دریافت کرو



فرض کرو کہ ص قطب ہو اور ص لا مقام ابتدائی اور م مرکز دائرہ اور ع کوئی نقطہ اسکی محیط پر ہی اور
ص س = ل اور س ص ل = دھ مفروض محدین قطبی نقطہ س کے ہیں اور س نصف قطر دائرہ کا ہے
اور نق اور ز قطبی محدین نقطہ ع کے ہیں تو

$$س ع = ع ص + م ص - ع ص م ص + جم ع ص م$$

$$\text{یعنی س} = \text{نق} + \text{ل} - \text{ل} - \text{ل} \text{ م جم (ر-ھ)} \quad (۱)$$

$$\text{یا نق} - \text{ل} - \text{نق ل} = \text{جم جم ر} + \text{ج ر ج ھ} + \text{ل} - \text{س} = \quad (۲)$$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات قطبیہ دائرہ کی اس صورت کی ہوتی ہے کہ
نق + ل - نق جم ر + ب نق ج ر + س =

اوس مساوات سے کی کہ لحاظ محور قائم الزاویہ کے دفعہ ۸۸ میں لکھی ہے لاکہ جگہ نق جم ر اور د کی جگہ
نق ج ر لکھنی ہے مساوات قطبیہ حاصل ہو سکتی ہے اگر مقام ابتدائی قطر ہو تو دھ = ۰ اس سبب سے
مساوات (۱) کی صورت یہ ہو گی کہ

$$\text{نق} - \text{ل} - \text{نق ل} = \text{جم ر} + \text{ل} - \text{س} = \quad (۴)$$

اور اگر یہ سپر اور فرید ہو کہ مسد بہی محیط پر واقع ہی تو محیط پر ل = س

(۱۰۶) دائرہ کا ایک ہائیک سی نقطہ پر ہی اور اوس پر عمود مسد نکالا گیا ہی تو اوسکو نصف قطر
کی رقمون میں اوس نقطہ کی دریافت کرو

فرض کرو کہ ص ق عمود ماس نقطہ پر مسد نکالا گیا ہی اور ص ق = ع تو

$$\text{ص س} = \text{ص ع} + \text{ع م} - \text{م ص ع} - \text{ع م جم ص ع س}$$

$$= \text{ص ع} + \text{ع م} - \text{م ص ع} - \text{ع م ج ص ع ق}$$

$$\text{یعنی ل} = \text{ل} + \text{س} - \text{س} - \text{س ع}$$

شکل میں م اور م دونوں ایک ہی جانب میں ماس نقطہ کی واقع ہیں۔ اگر ہم نقطہ ایک
کریں کہ ماس نقطہ کا درمیان م اور م کے واقع ہو تو ہمکو معلوم ہو گا کہ

$$ل = ن + س + ۲ س ع$$

(۱۰۷) یہاں تین بعض اوقات سوالات کے حل کرنے میں اور دائرہ کی خاصیتوں کے ثابت کرنے میں

شکلا مساوات (۴) دفعہ ۱۰۵ کی ہوتی

$$ل = ن + س + ۲ س ع = ۰$$

موجب خواص مساوات درجہ دوم کے ہم دیکھتے ہیں کہ حاصل ضربوں کی دو قیمتوں کا مطابق کر کے قیمت کے

ل = س ہی اور اس کا کچھ تعلق رسی نہیں ہی اور یہ نتیجہ مطابق اقلیدس کی مقالہ سوم کی

۵۳ و ۵۴ شکل کے ہے

اور نیز مجموعہ ر کی دو قیمتوں کا ۲ ل جم رہی ہے معلوم ہوا کہ اگر ایک خط قطب سے کھینچا جائے اور اس کا

ابتدائی سے ریڈیل رہی تو قطبی محدود نقطہ وسط وتر کے بعد دائرہ اس خط میں سے قطع کرتا ہی یہ ہیں

۲ ل جم رہی اور یہ یعنی ل جم رہی اور رہیں

اسے معلوم ہوا کہ مساوات قطبیہ مقام التقاطع نقطہ وسط وتر کی یہ ہیں کہ

اور یہ موجب دفعہ ۱۰۵ کے (۵) کے دائرہ کی مساوات ہی

شالین

(۱) مقام اور مقدار ان دائروں کے تعیین کرو کہ جن کی مساواتیں یہ ہیں

$$(۱) ل + ۲ س + ۳ س - ۴ س - ۵ س = ۱$$

$$(۲) ل + ۲ س + ۳ س - ۴ س - ۵ س = ۱$$

(۲) نقاط تقاطع دائرہ

$$ل + ۲ س = ۱ اور خطوط$$

$$ل + ۲ س = ۱ اور ۳ س - ۴ س = ۵ اور ۳ س + ۴ س - ۵ س = ۱ کے دریافت کرو$$

(۳) ایک دائرہ مبدی میں گذرنا ہی اور اس کی اندر لا اور محوروں کی مثبت خصوصیت سے طول ح

اور ق طول سماہیں تو مساوات دائرہ کی دریافت کرو

(۴) ایک دائرہ نقاط (ح وق) اور (ح وق) میں گذرنا ہی تو ثابت کرو کہ اس کا مرکز

اس خط پر واقع ہوگا کہ (ح - ح) (ل - ح) + (ق - ق) (و - ق) = (ق - ق) (و - ق)

(۵) نقاط (ل و و) اور (ل و و) میں جو خط طے او سکھو قطر دائرہ بنا کر اس کی مساوات دریافت کرو

(۶) دو نقاط معین اور پھر ایک ایسا نقطہ ہے کہ $دع = م ب$ لگے ہی
ایسے م ایک مقدار مستقل رہتی تو ثابت کرو کہ مقام التقاطع کا دائرہ ہی گرجم = ا کے ہو
تو اس صورت میں دائرہ نہیں ہوگا
(۸) ایک مساوات دریافت کرو کہ جسے نقاط تقاطع خط

$$\frac{لج}{ق} + ۱ = ۰$$

اور دائرہ لا + ر - ط لا - ص ص = ۰ کے متعین ہو کر ہیں

اور انہیں ایسا ارتباط دریافت کرو کہ جسے خط دائرہ کو مس کرے

(۹) مساوات ماس کی جو مبدیہ پر اس دائرہ

$$لا + ر - ط لا - ص ص = ۰$$

ثابت کرو کہ طول وتر مشترک دوائر کا جنکی مساواتیں یہ ہیں

$$(لا - ط) + (ر - ص) = (لا - ص) + (ر - ط) = س$$

$$س - (ط - ص)$$

(۱۱) مرکز اندر ایک نقطہ اس طرح متحرک ہوتا کہ اس کی ضلعوں کے نقطہ کے فاصلوں کا مربع ایک

مقدار مستقل رہتی ہی تو ثابت کرو کہ اس نقطہ کا مقام التقاطع دائرہ ہی

(۱۲) مثبت مساوی الاضلاع کی اندر ایک نقطہ اس طرح متحرک ہوتا ہے کہ اس کی ضلعوں کے

نقطہ کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ ایک مقدار مستقل رہتی ہی تو ثابت کرو کہ مقام التقاطع

اس نقطہ کا ایک دائرہ ہی

(۱۳) ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقاط معین سے اس کی فاصلوں کے مجموعہ کا مجموعہ ایک

مقدار مستقل رہتی ہی تو ثابت کرو کہ مقام التقاطع باورس نقطہ کا دائرہ ہی

(۱۴) بتلاؤ کہ مساوات دائرہ کی کیا ہو جائیگی جب اول ایک نقطہ محیط پر ہو اور محور ۲

کے زیادہ پر پائل ہوں اور حصے اونکی دائرہ کی اندر ج اور ق واقع ہوتے ہوں

(۱۵) محوروں کا کس زاویہ پر سیلان ہوگا جب مساوات

(۲۷) مقام النقط مساوات فی = اجم (ر-ھ) + ب جم (ر-ب) + س جم (ر-س) متبرک
 (۲۸) اب ایک خط متقیم معلوم ہے اور اسے دو خط غیر محدود ایک ساتھ یکساں میل رکھتے ہوئے کچھ
 گئے ہیں اور دائرہ جولا اور بین گذرنا ہی ان خطوط کو مل اور پر قطع کرتا ہی تو ثابت کرو کہ اگر مل اور منحنی سمتوں
 میں ایک واقع ہیں تو مجموعہ اول اولم کا برابر ایک مقدار مستقل کے ہوگا اور اگر مل اور ایک سمت میں واقع ہیں
 تو حاصل تفریق اول اور لام کا برابر ایک مقدار مستقل کے ہوگا

(۲۹) اب بس مثلث مساوی الاضلاع ہی اور ع + ب + ع س تو مقام التقاطع کا دریافت کرو
 (۳۰) ان خطوط متقیمہ معلوم ہیں اور وہ ایک خط قائم کے ساتھ زاویے ھ و ب و س وغیرہ پیدا
 کرتے ہیں اور ع ایک نقطہ لایا گیا ہی کہ مجموعہ اوں عمودوں کے مربوع کا جو اس نقطہ سے ان خطوط پر تھا
 جائیں ایک مقدار مستقل ہے تو بتاؤ کیا شرط ہونی چاہئے کہ مقام التقاطع کا ایک دائرہ ہو
 (۳۱) ایک نقطہ اس طرح متحرک ہوتا ہی کہ اضلاع کثیر الاضلاع منظم سی او سکی فاصلوں کے مربوع کا مجموعہ
 مقدار مستقل رہتی ہی تو ثابت کرو کہ مقام التقاطع اوں نقطہ کا دائرہ ہی

(۳۲) ایک خط اس طرح متحرک ہوتا ہی کہ مجموعہ عمودوں لع اور ب ق کا نقاط قائم لا اور ب ہی کو سمیٹتا
 مقدار مستقل ہے تو ع ق کے نقطہ وسط کا مقام التقاطع دریافت کرو

(۳۳) نقطہ قائم ط سے خط کجی اگر دائرہ قائم سے نقطہ ع پر لٹا ہی اور ط ع میں ایک نقطہ ق لایا مقرر کیا
 ط ع ۰ ط ق = ق ق تو مقام التقاطع کا دریافت کرو

(۳۴) ثابت کرو کہ مساوات (ح-ع-ق-ل) = س م (ل-ھ) + (س-ق) م
 دائرہ لا + ب = س کے دو ماسوں کو تعبیر کرتی ہی اور یہہ دائرہ نقطہ (ح-ق) پر گذرنا ہی
 (۳۵) اس مساوات سے کیا تعبیر ہوتا ہے ق = نق ط جم ر قطر = ط ۰ =

(۳۶) مساوات قطبیہ ایک دائرہ کی ہی کہ نق = ۲ س جم ر تو ثابت کرو کہ مساوات

۲ س جم ب جم ھ = فی جم (ب + ھ - ر) ایک ایسی وتر کو تعبیر کرتی ہی کہ اگر اسے
 اطراف میں قطب سے نصف قطر ملائی جائیں تو وہ زاویے ھ و ب مقام ابتدائی کے ساتھ
 (۳۷) ایک دائرہ کے ماس جو نقاط ع اور ق سے نکالیں نقطہ پر ملے ہیں اگر ان نقطوں

باب ہفتم میں خطوط ملائے جائیں اور وہ ایک دوسرے کو جو پہلے قطر پر نمودار نقاط
اور قیوت پر قطع کریں تو ثابت کرو $ع ب = ق ب$

محور ان اضماع

(۱۰۸) ہم نے ثابت کیا ہے کہ مساوات دائرہ کی بیہ ہے کہ

$$(لد - ط) + (د - ص) = س - آ = -$$

اب ہم اسکو اختصاراً $خص =$ لکھینگے

اول اگر (لدو) محیط دائرہ پر نہوں تو $خص$ برابر صفر کے نہیں ہوگا

ہم اس صورت میں $خص$ کے معنی ہندسہ بیان کرتے

اول فرض کرو کہ (لدو) دائرہ سے باہر واقع ہیں (لدو) سے ایک تماس دائرہ کا کچھ

اور نقطہ تماس اور مرکز (طو ص) دائرہ میں خط طوا اور نیز (لدو) اور (طو ص) میں خط طوا

فرض کرو کہ $م$ تعبیر (طو ص) کو کرتا ہی اور ق نقطہ (لدو) کو ت نقطہ تماس تماس کا ہی کہ

پس ہم نے ایک مثلث قائم الزاویہ بنالیا ہی اور چونکہ (لد - ط) + (د - ص) = ق س کے معلوم ہے

$خص = ق ب$ یعنی $خص$ مربع تماس کو تعبیر کرتا ہی جو (لدو) سے دائرہ کا نکال دیا۔ لیکن حکم

(۱۰۸ ش ۳م) اقلیدس کے مربع تماس کا برابر ہوتا ہے اس خط کے حصوں کے سطح کے جو نقطہ

(لدو) سے کچھ جائے اور دائرہ اس کے حصے بنے تو اس سطح کو بھی $خص$ تعبیر کریگا

دوم اگر (لدو) دائرہ کے اندر ہی تو $خص$ منفی ہوگا۔ فرض کرو کہ $م$ اور ق کے وہی مراد ہے

جو پہلی تھی۔ اور س ق کو خارج کرو کہ دائرہ سے ت اور ت پر ملے تو

$$خص = س ت - س ق = (س ت + س ق) - (س ت - س ق)$$

اسے معلوم ہوا کہ حکم (۱۰۸ ش ۳م) اقلیدس کے اگر کوئی خط ق ع دائرہ سے اور ع طوا

کچھ جائے تو قیت $طو ق$ اور $ع ق$ کی۔ $خص$ ہے

(۱۰۹) فرض کرو کہ $خص$ تعبیر (لد - ط) + (د - ص) = س کو کرتا ہی اور

۹۲
 خص تعیر (لد-ط) + (ر-ص) س کو کرتا ہے

توضیح = (۱) اور خص = (۲)

مساواتین دو دائروں کی ہیں اب معنی اس مساوات کے بیان کرتے ہیں کہ

خص - خص = $\frac{\text{سطح}}{\text{اول قوت ہی اس کا}} \times \text{خص} = \text{کسی خط استقیم کی مساویہ}$

تعبیر کرتا ہے اور نیز اگر لادو ایسی دریافت کئے جائیں کہ جن سے ایک ہی وقت میں مساوات (۱) اور (۲) کی شرائط پوری ہوں تو وہ مساوات (۳) کی شرائط کو بھی پورا کر نکلی۔ اسے ثابت ہو گا کہ اگر جو (۱) اور (۲) سے تعبیر ہوتے ہیں ان میں تقاطع کریں تو (۳) اوس خط کی مساوات کو تعبیر کرے گا جو تقاطع میں ملائیں

تغیر کریگا جو نقاط قطع میں ملائیں
اور نیز فرض کرو کہ کسی نقطہ (۳) میں جو دونوں دائروں کے باہر واقع ہو ماس (۱) اور (۲) کے

کچھیں تو بوجب دفعہ ۱۰۸ کے ان ماسٹروں کا طول اکسپین برابر ہو گا۔ پس اسے معلوم ہوا کہ

خواہ (۱) اور (۲) تقاطع کریں یا نہ کریں خط (۳) کی یہی خاصیت ہی کہ
اگر اس کی کسی نقطہ سے خطوط دو نواداروں کو مس کرتے ہوئے کیے جائیں تو طول ان خطوط
آپس میں برابر ہوگا

(۱۱۰) کوئی مساوات اس شکل کی

(۱۱۰) کوئی مساوات اس کی
 ۱) $(\text{لا} + \text{سا}) + \text{بلا} + \text{مس} + \text{د} = \text{ن}$
 ایک دائرہ کو تعبیر کریگی اس لئے کہ جب لا پر مساوات کو تقسیم کریں تو مساوات کی صورت ایسی
 جیسی عمومی صورت مساوات دائرہ کی ہو اگر قلمی

جس کے لئے اور ناکام واحد ہو تو مساوات دائرہ کی صورت نہایت سادی ہوتی ہے
حد اگر خاص = . اور خاص = . دو دائروں کی سادی مساواتیں ہوں تو خط

خص - خص = کو محور صلی دائرہ کا کہتے ہیں

یہاں محرومیت قائم الزامیہ اور محرومیت دونوں ہو سکتے ہیں

اب یہ تعریف علم ہند کے موافق سنو۔ ایک خط مستقیم ایسا ہمیشہ دریافت ہو سکتا ہی

کہ اگر اس کے کسی نقطہ سے ماس دودوار معلوم نکالیں تو وہ آپس میں برابر ہوں اس خط کو محور اصلی دائروں کا کہیں گے

(۱۱۱) اصلی محور میں معلوم دائروں کے ایک نقطہ پر ملتے ہیں فرض کرو کہ مساوات میں معلوم دائروں کے یہ ہوں کہ

خص_۱ = ۰ - (۱) خص_۲ = ۰ - (۲) اور خص_۳ = ۰ - (۳)
تو مساوات میں محوروں کی یہ ہو گئیں

خص_۱ - خص_۲ = ۰ - (۱) اور (۲) سے تعلق ہے

خص_۲ - خص_۳ = ۰ - (۲) اور (۳) سے تعلق ہے

خص_۳ - خص_۱ = ۰ - (۳) اور (۱) سے تعلق ہے

تینوں خط ایک نقطہ پر ملتے ہیں اس لئے کہ یہ بات ظاہری کہ تینوں لداور کی جو دو مساواتوں کی

شرایط کو ایک وقت میں پورا کرینگی وہ تیسری مساوات کی شرایط کو بھی پورا کرینگی

(۱۱۲) دفعات گذشتہ کی بہت سی نتائج خاص خاص صورتوں میں نکلتے ہیں مگر ہم بعض انہیں سے دودائروں کے محور اصلی کے باب میں بیان کریں گے

(۱۱۳) محور اصلی عمود اوس خط پر ہوتا ہے جو دائروں کے مرکوزوں میں ملتا ہے۔ فرض کرو کہ مساوات میں دائروں کی یہ ہوں کہ

$$(ل - ط) + (ر - ص) - س = ۰$$

$$(ل - ط) + (ر - ص) - س = ۰$$

تو مساوات محور اصلی کی یہ ہو گی کہ

$$(ل - ط) - (ل - ط) + (ر - ص) + (ر - ص) - س + س = ۰$$
 یعنی

$$(ل - ط) + (ر - ص) + (ر - ص) - س + س = ۰ \quad (۱)$$

اور مساوات خط کی جو مرکوزوں میں ملتا ہے موجب دفعہ ۳ کے یہ ہو گی کہ

$$ر - ص = ط - ل \quad (۲)$$

پس بموجب دفعہ ۴ کے (۱) اور (۲) ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ بنائیں۔
 (۱۱۴) جب دو دائرہ آپس میں سر کریں تو اوں کا تماس مشترک نقطہ تماس پر محور اصلی دائروں کا ہونا
 اس واسطے کہ محور اصلی نقطہ تماس پر عمود اوان خطوں پر جو مرکزوں میں ملایا جائے۔
 (۱۱۵) فرض کرو کہ نصف قطر ایک دائرہ کا لانا تھا چوں نا ہوگا یعنی دائرہ ایک نقطہ بن جائے تو محور اصلی
 پر باقیہ ہوگی کہ محور اصلی کے کسی نقطہ سے ہم خط نقطہ معلوم تک پہنچیں اور تماس دائرہ معلوم کا ہمیں
 تو خط اور تماس باعتبار طول کے آپس میں برابر ہونگے

(۱۱۶) محور اصلی ایک نقطہ اور دائرہ کا دائرہ سی باہر واقع ہوتا، خواہ نقطہ دائرہ کے اندر ہو خواہ باہر
 اس واسطے کہ اگر محور اصلی دائرہ سے ملے تو محدودین نقاط تقاطع کے مساوات نقطہ اور مساوات
 دائرہ دونوں کی شرائط کو پورا کر نیگی لیکن مساوات نقطہ کی شرائط سوا اوس نقطہ کے محدودین کے
 کسی اور نقطہ کے محدودین سے پوری نہیں ہو سکتیں ہے ثابت ہوا کہ محور اصلی دائرہ سے نہیں مل سکتا
 اور اگر نقطہ محیط دائرہ پر ہو تو محور اصلی تماس اوس نقطہ پر دائرہ کا ہوگا
 (۱۱۷) فرض کرو کہ دو نو دائری نقطے بن جائیں تو محور اصلی کے کسی نقطہ سے قائم نقطوں تک خط
 کھینچ کر طویل میں آپس میں برابر ہونگی۔ اسے معلوم ہوا کہ محور اصلی دو نقاط معلوم کا وہ خط ہوتا ہے
 جو نقاط معلوم کے درمیانی فاصلہ کے قائمی زاویوں پر تضییف کرتا ہے

(۱۱۸) فرض کرو کہ دفعہ ۱۱ میں ہر ایک دائرہ ایک نقطہ ہو جائے تو اوس میں جو دعویٰ ثابت ہوئی
 اوسکی یہ صورت ہو جائیگی کہ عمود جو اضلاع مثلث کے نقاط وسط سے اوپر نکالے جائے ایک نقطہ پر
 (۱۱۹) علم ہندسہ کا یہ ایک مشہور سوال ہے کہ ایک خط مستقیم دو معلوم دائروں کو مس کرتا ہوا کچھ
 اگر دائرے آپس میں تقاطع نہ کریں تو چارہ تماس مشترک کچھ جاسکے ہیں اور دو ان میں سے برابر
 میں اوس خط کے ساتھ رکھیں گے جو اوں کے مرکزوں میں ملایا جائے اور اس خط کو دائروں کے باہر
 وہ تماس قطع کر نیگی اور باقی دو تماس ہی اس خط کے ساتھ یکساں میں رکھیں گے مگر چھوٹے
 دائرہ سے پرے اس خط سے وہ ملینگے۔ ان دو نقاط تقاطع کو مرکز نامہ ثابت ہے کہ یہ نیز

قطب اور قطبی

(۲۰) حد اگر مساوات دائرہ کی پہنچ ہو کہ

$$لا + ر = س$$

اور ح اور ق کسی نقطہ کے محدین ہوں تو

لا ح + ر ق = س کو قطبی خط نقطہ (ح وق) کا اور نقطہ (ح وق) کو

قطب خط لا ح + ر ق = س کا لچاٹ دائرہ معلوم کے کہنے کے اور اس حد کو ہم

اس طرح سے بھی بیان کر سکتے ہیں۔ ایک نقطہ معلوم کا قطبی خط مستقیم باعتبار دائرہ معلوم

وہ خط مستقیم کہلاتا ہے جس کی مساوات میں محدین او س نقطہ معلوم کے سطح ملنے ہو جس طرح

کہ مساوات ماس دائرہ میں اس کے نقطہ ماس کے محدین ملنے ہوتی ہیں۔ نقطہ معلوم اس

خط کا قطب کہلاتا ہے

اس حد ہم تعالیمین پر سکتی ہیں اس لیے کہ مساوات ماس دائرہ جو نقطہ معلوم پر اس کے مختلف

صورتوں میں بیان ہو سکتی ہے اور سبب اس اختلاف کا یہ ہے کہ نقطہ معلوم کے محدین سبب

مساوات دائرہ کے مختلف طرح سے مربوط ہوتے ہیں مثلاً ماس کی مساوات محدین میں سے

ایک کے اندر بیان ہو سکتی ہے لیکن اوپر کی حد میں ماس کی اسی مساوات سی ہماری مراد ہی

جسمین بالطبع نقطہ معلوم کے محدین عقلاً ملتف ہوتی ہیں

نقطہ معلوم کی خط قطبی کی جو صفت خاصیت دفعہ ۱۰ میں بیان ہوئی ہے اس کی مواضع

اس کی یہ کہہ سکتے ہیں کہ ایک نقطہ معلوم کا باعتبار دائرہ معلوم کی وہ خط مستقیم جو مقام النقطہ

اون ماسوں کے نقطہ تقاطع کا ہے جو اون وتروں کے اطراف سے نکالے جائیں جو اس نقطہ

معلوم سے کیے جائیں اور اس نقطہ معلوم کو قطب اس خط کا کہتے ہیں

اگر نقطہ معلوم باہر دائرہ سے واقع ہو تو اس کا قطبی خط منطبق اون ماسوں کے وتر تا

ہو جائیگا جو اس نقطہ سے دائرہ کے کہیں گے

(۱۲۱) اگر ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم کے قطب میں گزرے تو دوسرا خط مستقیم پہلے خط مستقیم

قطب میں گزرے گا

فرض کرو کہ Δ دو قطب اول خط مستقیم کا ہو تو

$$(۱) \quad \Delta \Delta + \Delta \Delta = \Delta \Delta$$

ساوات اول خط کی ہوگی

فرض کرو کہ Δ دو قطب دوسرے خط مستقیم کا ہو تو

$$(۲) \quad \Delta \Delta + \Delta \Delta = \Delta \Delta$$

ساوات دوسرے خط مستقیم کی ہوگی

چونکہ اول ساوات Δ پر گزرتی ہی اسلئے

$$\Delta \Delta + \Delta \Delta = \Delta \Delta$$

چونکہ یہ ساوات صحیح ہی اسلئے (۲) پر گزرتی ہی اسلئے

(۲۲) نقطہ تقاطع دو خطوط مستقیم کا قطب اس خط مستقیم کا ہی جو ان خطوط کے قطبوں اور اسے ان دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرو اور جو خط ان کے قطبوں میں ملائیں اس سے تعبیر کرو چونکہ اس قطب آئین گزرتا ہی اسلئے جو خط ۲۲ کے آ قطب اس پر گزرتا ہی اور علیٰ ہذا القیاس ب قطب اس پر گزرتا ہی اسلئے نقطہ تقاطع اور ب کا قطب اس کا ہی

امثال متفرقہ

(۱) ماس اوس زاویہ کا دریافت کرو جو درمیان ان دو خطوط مستقیم کے وقع ہی جگہ درمیانی

محور کے طو ص اور ط و ص جدا گانہ ہیں

(۲) اگر خط مستقیم جو اس ساوات سے تعبیر ہوتا ہے

کہ Δ (مس + حم آر) - ۲ لاس + ۲ جب = زاویہ اور ب محور کا

تو ثابت کرو کہ سن ۲ = مس ۲

(۳) مربع کا ایک کونہ مبدا پر ہی اوس کا ایک ضلع زاویہ صہ محور لاسے بنانا

تو مساوات کارون ضلعون اور دو نقطوں کی دریافت کرو

(۴) ایک متوازی الاضلاع ان خطوں سے بنتی ہے جنکی مساواتیں یہ ہیں کہ

$$\frac{ط}{ص} + \frac{ص}{س} = ۱ \text{ و } \frac{ط}{ص} + \frac{ط}{س} = ۲$$

$$\frac{ط}{ص} + \frac{ط}{س} = ۱ \text{ و } \frac{ط}{ص} + \frac{ط}{س} = ۲$$

تو ثابت کرو کہ یہ ضلع ایک دوسرے کے ساتھ زاویے قائم بناتے ہیں

(۵) بعد نقطہ (لا و م) کا دو خطوط مستقیم سے جو مبدیہ و مبدیہ پر گذرتا ہی رہی تو ثابت کرو کہ

دونوں اس مساوات سے تعبیر ہوگی کہ

$$(لا - م) = (لا - م) = (لا + م) \text{ (لا و م)}$$

(۶) وہ شرط دریافت کرو کہ جن کو ان خطوط تعبیر کی گئی

$$لا + م + ب = لا + م + س = لا = ۰$$

سے منطبق اوں خطوں پر ہوں جو اس مساوات سے تعبیر کیے جائیں

$$لا + م + ب = لا + م + س = لا = ۰$$

(۷) اگر ھ = ۰ اور ب = ۰ اور س = ۰. ثلث کے تینوں ضلعوں کی مساواتیں ہوں اور

ط و ص و س عمودی فاصلے درمیان اس ثلث کے ضلع اور ایک اور دوسرے ثلث کے ضلع ہوں اور ان ثلثوں کے ضلع آپس میں متوازی بھی ہوں تو خط جو ان کے دوائر اندرونی کے مرکوزوں میں مل

کیا جائے وہ ان مساواتوں میں سے کسی ایک سے تعبیر ہوگا

$$\frac{ط}{ص} = \frac{ب}{س} = \frac{ط}{ص} = \frac{ب}{س} = ۱$$

(۸) ثابت کرو کہ مساوات خط مستقیم کی جو نقطہ وسط ضلع ب س ثلث اب س میں گزرتا

اور متوازی خارجی تقصیف کرنے والے زاویہ کا ہے یہ ہے کہ

$$ب + س + ھ = (ب + س) = ۰$$

(۹) مساوات خط کی جو متوازی ب س کا مرکز دائرہ خارجی سے کہ ب س کو چھوتا ہے

تو اس کے مساوات یہ ہوگی کہ

$$(ب + ھ) + (ب + ھ) + (س + ھ) = ۰$$

(۱۱۵) مساواتیں اور خطوں کی دریافت کرو جو ان خطوط کے نقطہ تقاطع پر گذرنا ہی جلی مساواتیں ہیں
 $ل + ح + م + ب + ن = ۰$ اور $ل + ح + م + ب + ن = ۰$

اور ان کے درمیانی زاویوں کی تضعیف کرتی ہیں

(۱۱) اگر $ل = ۰$ اور $م = ۰$ مساواتیں دو دائروں کی ہوں تو ثابت کرو کہ مناسب قیمت مقدار مستقل ہوگی

مقرر کرنے سے مساوات $ل + ح + م + ب + ن = ۰$ اور $ل + ح + م + ب + ن = ۰$ کے نقطہ تقاطع

(۱۲) ایک دائرہ قائم کو ایک سلسلہ دائروں کا قطع کرنا ہی اور ان میں سے ہر ایک دو نقطوں میں گذرنا

تو ثابت کرو کہ خطوط جو نقاط تقاطع دائرہ قائم اور سلسلہ دائروں میں سے ہر ایک دائرہ کی گذرنا ہی ایک نقطہ

باب ہشتم

قرب البیضی

(۱۲۳) تین خطوط منحنی کے ہم حدود بیان کریں اور یہ ان حدود سے قوانین ان کی متنبط کریں

اور بعد از ان ان مساواتوں سے ان کی بعض خواص کی تحقیقات کریں

حد تراش مخروطی مقام نقاط اور نقطہ کا ہوتا ہی جو محور کا سطح ہوتا ہی کہ نقطہ قائم اور

قائم سے اس کے فاصلوں میں ہمیشہ ایک نسبت مستقل رہتی ہی اگر نسبت مساوی واحد کے ہو

تو خط منحنی کو قرب البیضی کہتے ہیں اور اگر کم واحد ہو تو بیضی اور اگر زائد واحد ہو تو بعید البیضی

نقطہ قائم کو نقطہ سا کہ اور خط قائم کو خط منظم یا نقطہ منظم کہتے ہیں

(۱۲۴) ہم نیچے اس بات کو دکھلا دیں کہ اگر مخروط کو کوئی سطح مستوی قطع کری تو تقاطع کا

کیا تو قرب البیضی ہوگا یا بیضی یا بعید البیضی یا دائرہ یا دو خط یا ایک نقطہ۔ اس لیے ان

قرب البیضی اور بیضی اور بعید البیضی کو تراش یا تفصل مخروطی کہتے ہیں اور ان میں دائرہ اور

دو خط مستقیم اور ایک خط مستقیم اور نقطہ ہی شامل ہیں اور موافق ان معنی کے ہم یہ بھی ثابت

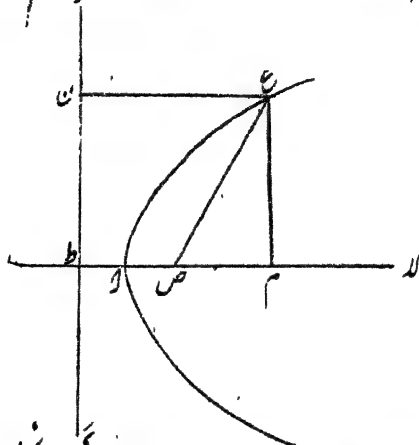
کریں گے کہ ہر خط منحنی درجہ دوم کا تراش مخروطی ہوتا ہی بالفعل و فعلہ ۲۲ کے حدود پر فقط

توجہ تام جائے اور اس کے نتائج اہم بیان کرتے ہیں

ابہم (۱۲۵) مساوات قریب الضوی کی دریافت کرو

قرب البصوی تمام النقاط اوس نقطہ کا ہی کہ جس کا فاصلہ نقطہ قائم سے اور ایک خط مستقیم قائم سے

بابہم برابریوں



فرض کرو کہ نقطہ قائم ص ہو اور دے خط قائم ص ط عمود دے سر نکالو اور ط کو بند مانو اور ط ص کو سمت محور لاکے اور ط د کو محور کی سمت قرار دو اور فرض کرو کہ ط ص = ۲ ط

اورع کوئی نقطہ پر تمام النقاط میں ملاؤ ص ع اورع م متوازی ط م کا اورع ن متوازی
ط لہ کا نکالو اور فرض کرو کہ ط م = لہ اورع م = س

یہی موجب حدود کے صدق = عین

∴ صرغ = ع ن ا

∴ ع م + ص م = ع ن

یعنی $\alpha = (\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_3$

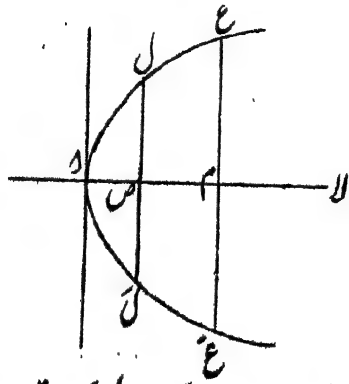
یہ مساوات قرب البیضوی کی ہے۔ موافق مبداء اور محذور فرضہ کے ہے (۱)

خط منحنی محور لاکو نقطہ ۱ قطع کرتا ہی اور یہ نقطہ لاکاطص کی تضییف کرتا ہی اسواسطی حیثیت
 $s =$ مساوات (۱) میں ہو تو $لا = ط$ مساوات کی صورت نہایت سادی ہو جائیگی اگر ہم لاکو سب
 قرار دیں - فرض کرو کہ $لا = ام$ اور $لا = لد$ - ط تو مساوات (۱) یہہ ہو جائیگی کہ

ہم زبر کو لایکے القطر کے مابین لکریں یا دیکھیں کہ سب دوسری پس اوات قریب البیوی کی رہ چل ہوگی

(T) $u^b v^c = r$

(۱۲۶) مساوات ۲ = ۳ ط لاسے قرب البیضی کو ترسم کرو



اس مساوات کے یہ ظاہر ہے کہ لا کی ہر شے قیمت کے واسطے کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار میں وہی ہیں اور
 حالات میں مخالفت۔ پس اسے معلوم ہوا کہ ہر نقطہ ع کے مقابل میں محور لا کی دوسری طرف
 ایک اور نقطہ ع ایسا ہوگا کہ $ع = م$ ۔ اسے معلوم ہوا کہ لحاظ محور لا کی خط منحنی میں
 ایک قرینہ پایا جاتا ہے لا کی منفی قیمتوں کے موافق کی قیمتیں نہیں ہو سکتیں اسے معلوم ہوا کہ خط
 منحنی کا کوئی حصہ لا کی جانب چپ میں نہیں واقع ہی چونکہ لا کی ہر شے قیمت ہو سکتی ہے اسے خط منحنی
 لا انتہا دائیں طرف مبداء کی پہل سکتا ہے۔ اور اس خط منحنی کا اور لا کو محور منحنی کا ہے۔
 (۱۲۷) پس مجموعہ طرف خط منحنی کے محور لا کی طرف کبھی ہی اس طرح سے شکل ترسم کرنا اس قدر نہایت
 صحیح ہو جائیگا کہ خط منحنی کے کسی نقطہ کا محدود درمیان اس اور نقطہ معین کے واقع ہی ہوا ہوگا
 نسبت محدود اس خط مستقیم کے جو اس اور نقطہ معین میں ملایا جائے۔
 فرض کرو کہ ع ایک نقطہ معین ہے اور لا و اس کے محدود میں تو مساوات ۱ کی جیسے کہ
 $ع = لا = \frac{ع}{لا} (ط)$ ۔ لا کیونکہ $ع = ۳ ط$ لا فرض کرو کہ لا محدود نسبت لا کے کم ہے
 چونکہ خط منحنی کا معین $۳ ط$ لا ہے اور خط مستقیم کا معین $\frac{ع}{لا} (ط)$ ۔ لا یا $\frac{ع}{لا} (ط)$ ۔ لا
 پس اسے ظاہر ہے کہ معین خط منحنی کا بڑا خط مستقیم کے معین ہے اسی سے کہ خط منحنی کو محور
 محور لا کی طرف بنایا ہے

باب ہشتم بعد اسکے

(۱۲۸) اللہ تراش محرومی کے لفظہ مسلمین جو معین لدر تہائی اور کا دو خید عرض شتیم

خط منحنی کا اگلا تاہی۔ دفعہ ۱۲۶ کی شکل میں اصل عرض ستیقم ہے۔

فرض کرو کہ $ل = ط$ تو اس سے $ا = ط$ سے

$r = \pm r$ اسے ثابت ہوا کہ $l = v = l$ اور $l = v = r$

(۲۹) بعد ہمارے قریب البیضوی کی کسی نقطہ کے محدود کی رقموں میں بیان کرو

خط منحنی کے کسی نقطہ کا بعد اس کے برابر جوتا اس بعد کے جو وہ نقطہ خط منقطع سے رکھتا ہے

شکل دفعہ ۲۵ کی دیکھو تو معلوم ہوگا کہ

ص ع ا = وم + وص

$$b + 1 \mu =$$

(۱۲) قریب البیضوی کے کسی نقطہ کے ماس کی مساوات دریافت کرو (حد دفعہ ۹۰ کی دیکھی)

فرض کر دو کہ دو متصل نقطے خط منحنی پر ہیں اور ان میں سے ایک نقطہ کے محدودین لگا اور دوسرے

نقطہ کے محدبین لگے وہ ہیں تو سادات خط قاطع کی حجاب نقطون پر گذرنا ہی یہ ہوگی کہ

$$(1) \therefore \therefore (u-u) \frac{z-z}{u-u} = z-z$$

چونکہ (لَا وَهَّ) اور (لَا وَهَّ) قریب البیضوی ہیں

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ اور } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(u - \bar{u}) \cdot n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{b_n}{s+1} = \frac{s-s}{1-1} \therefore$$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات (۱) اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$(1 - \mu) \frac{p_c}{s + \mu} = s - s$$

لیکن اب اپنی حد میں $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اسے معلوم ہوا کہ مساوات تماس کی نقطہ (لاؤئی) کی

(r) $(\bar{u} - u) \frac{df}{f} = s - s_k$

اور یہ مساوات ساڈی اس طرح بن سکتی ہے کہ $\frac{1}{2} \pi$ میں ضرب دو تو

$$\vec{s} + (\vec{u} - \vec{u})_{br} = \vec{s}$$

$$\dots (u + u) \cdot b_f =$$

(۱۳۱) مساوات ماس کی نہایت آسانی سے اوس زاویہ کے ماس کی رموز میں بیان ہو سکتی ہے جو یہ خط محور سے بنایا ہے

اس واسطے کہ مساوات ماس کی (ل د و ک) پر

$$ر د = ط ر (ل د + ل د)$$

$$\frac{ط ر}{ر د} + ل د = \frac{ط ر}{ر د}$$

$$\frac{ط ر}{ر د} + ل د = \frac{ط ر}{ر د}$$

$$(۱) \dots \dots \dots \frac{ط ر}{ر د} + ل د = \frac{ط ر}{ر د}$$

فرض کرو کہ $\frac{ط ر}{ر د} = م$ پس (۱) اس طرح لکھی جاتی ہے کہ

$$(۲) \dots \dots \dots م = ل د + ط$$

یہ مساوات مطلوبہ ہے۔ بالکس کے مساوات کی یہ شکل ہی وہ ماس قریب البضوی کی ہے

(۱۳۲) دفعہ ۴ کی طرح یہ بات یہاں بھی بتلائی جاسکتی ہے کہ قریب البضوی کا ماس

ایک نقطہ براؤ سے ملتا ہے اور نیز اگر ایک خط قریب البضوی سے ایک نقطہ پر ملتا ہے تو وہ

اوس نقطہ پر اکثر ماس ہوگا

$$(۱) \dots \dots \dots اس واسطے کہ فرض کرو کہ م = ل د + ط$$

یہ مساوات قریب البضوی کے ہے

اور $ر د = م + ل د$ (۲) مساوات خط مستقیم کی ہے اور نقاط تقاطع کے محدود کے

دریافت کرنے کے واسطے یہ مساوات ہوگی

$$(م + ل د + ط) = م + ل د$$

$$(۳) \dots \dots \dots یام ل د + (م + ل د + ط) = م + ل د$$

اس مساوات درجہ دوم کی دو قیمتیں ہیں مگر یہ صورت مستثنیٰ ہے کہ (م + ل د + ط) = م + ل د

یعنی جب $ط = ۰$

اے معلوم ہو کہ خط (۱) اگر قریب البضوی سے ملتا ہے تو وہ دو نقطہ پر ملتا ہے مگر اوس

صورت میں نہیں کہ س = ط اور اس صورت میں دفعہ (۳) کے موافق وہ ماس
 قریب البیضوی کا ہی لیکن اگر مساوات (۲) اس صورت کی ہو کہ $s = ط$ تو خط محور لدا کا
 متوازی ہوگا تو بجای (۳) کے ہم کو یہ مساوات حاصل ہوگی کہ $s = ط$ لدا اور اس کی ایک
 قیمت ہی اسے معلوم ہو کہ خط متوازی محور قریب البیضوی کا اسے صرف ایک نقطہ پر ملتا ہے
 لیکن وہ ماس اس کا نہیں ہے

(۱۳۳) خط تختی کے راس پر محور ماس ہوتا ہے اس کے مساوات ماس کی (لد وئی) ہیں
 $رک = ط (لد + لڈ)$

جب $لد = ۰$ اور $رک = ۰$ تو یہ مساوات ہوگی کہ $لد = ۰$

(۱۳۴) قریب البیضوی کے کسی نقطہ عمود الماس کی مساوات دریافت کرو (دفعہ ۹ کی حدود کو دیکھو)

فرض کرو کہ لڈ وہ نقطہ کے محدود ہیں تو مساوات ماس کی اس نقطہ پر یہ ہوگی کہ

$$ر = ط (لد + لڈ) \dots (۱)$$

اور مساوات ایک خط کی جو (لا وک) میں گزرتا ہے اور عمود (۱) پر ہے

$$ر - ر = ط (لد - لڈ) \dots (۲)$$

یہ مساوات عمود الماس (لا وک) کی ہے

(۱۳۵) مساوات عمود الماس کی اس زاویہ کے ماس کی رقموں میں بیان ہو سکتی ہے جو خط

محور خط تختی کے ساتھ بناتا ہے اس کے مساوات عمود الماس کی یہ ہے کہ

$$ر = ط (لد + لڈ) + ر$$

$$یا ر = ط (لد + لڈ) + ر \dots (۱)$$

فرض کرو کہ $ر = ط (لد + لڈ) + ر$

پس (۱) اس طرح لکھی جاتی ہے کہ

$$ر = ط (لد + لڈ) + ر \dots (۲)$$

(۱۳۶) اب ہم بعض خواص قریب البیضوی کے مستنبط دفعات مذکور سے کرتے ہیں
 فرض کرو کہ لڈ وہ محدود نقطہ کے ہوں اور ع ماس نقطہ کا اور ع عمود الماس

$$r = \frac{p}{(l + l)} \dots (1)$$

ساوات خط کی جو مساوات سے نمود (۱) پر نکالاجا یہ ہوگی کہ

$$r = \frac{p}{(l - p)} \dots (2)$$

اب ہم لاؤ کہ مساوات (۱) اور (۲) کی وساطت سے ساقط کرتے ہیں

$$\text{مساوات (۳) سے ہم لاؤ کہ } r = \frac{p}{(l - p)} \text{ لے کر } r = \frac{p}{(l + l)} \text{ کی شکل میں جاکر}$$

$$r = \frac{p}{(l + l)} + \frac{p}{(l - p)} \dots (4)$$

پس سوال کی صورت تبدیل ہو کر یہ ہوگی کہ (۲) اور (۴) سے r کو ساقط کر

$$\text{اور (۲) سے } r = \frac{p}{(l - p)} \dots (5)$$

$$\text{اسکو (۴) میں مندرج کرو}$$

$$r = \frac{p}{(l - p)} - \frac{p}{(l - p)} = 0$$

$$0 = \frac{p}{(l - p)} + \frac{p}{(l - p)} = 0$$

$$\text{یا } \frac{p}{(l - p)} + \frac{p}{(l - p)} = 0$$

$$\text{اگر جزئی } \frac{p}{(l - p)} + \frac{p}{(l - p)} = 0 \text{ اور } l = p \dots (6)$$

جو نقطہ سطح متعین ہوتا اسی جگہ کہتے ہیں لیکن وہ مقام انقاط تقاطع (۱) اور (۲) اس کے جوہر میں مساوات (۴) کی شرائط کو لور کرتی ہیں اگرچہ وہ مساوات (۲) کی شرائط کو لور کرتی ہیں لیکن مساوات (۱) شرائط کو نہیں پورا کرتی اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ مقام انقاط مطلوب مساوات

$$(1) \text{ سے حاصل ہوتا ہے}$$

$$\text{اور یہ مساوات (۶) کے دوسری جزئی پر خیال کرنے سے حاصل ہوتا ہے}$$

$$\text{اور اس نتیجہ کا ثبوت آسانی سے ہو سکتا ہے اس لئے کہ اگر ہم } l = 0 \text{ کی مساوات (۱)}$$

$$\text{میں کہیں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ } r = \frac{p}{(l - p)} = \frac{p}{(0 - p)} = -1 \text{ اور اگر ہم } l = 0 \text{ کی مساوات}$$

$$(2) \text{ میں کہیں تو یہی ہوگا کہ } r = \frac{p}{(l - p)} = \frac{p}{(0 - p)} = -1 \text{ اسے ثابت ہوا کہ مساوات (۱) اور (۲)}$$

خط لہ = ۰ پر قطع ہوتے ہیں
 پس اگر دفعہ ۱۳۶ کی شکل میں ط نقطہ تقاطع ماس نقطہ اور محور کا ہوتو جس ط شود ماس
 (۱۳۹) جو عمل دفعہ مذکور میں ذکر ہوا، وہ نہایت بکار آمدی اور مکمل مطلب کی ہے۔ (۱)
 (۲) مساواتیں دو خطوط مستقیم کی تہیں اگر ان ہم ساری مساواتوں سے قیمتیں لے اور
 کی دریافت کریں تو اسے خطوط کے نقطہ تقاطع کا مقام متعین ہوگا۔ قیمتیں لے اور د
 متوفی لے اور د کی قیمتوں پر اس طرح سے ہر مختلف نقاط تقاطع مختلف خطوط کے مساوات
 (۱) اور (۲) سے حاصل ہونگی۔ اگر مساوات (۱) اور (۲) سے ہم لے اور د کو مسا
 کریں تو ایک مساوات ہموایی حاصل ہوگی کہ وہ (۱) اور (۲) کے ہر نقطہ تقاطع کے واسطے
 موضوع ہوگی اور یہ مساوات موافق تعریف مقام النقط کی (۱) اور (۲) کی نقاط تقاطع کے
 مقام النقط کی مساوات ہوگی

بعض اوقات لے اور د کی ساقط کرنے سے ایک ایسی مساوات حاصل ہوتی ہے کہ وہ ہماری مطلب
 مقام النقط کو نہیں تعبیر کرتی جیسے دفعہ گذشتہ میں ہر کو حاصل ہوئی تھی۔ طالب علموں نے تجربہ
 کے سوالات کے حل کر تے ہیں اس بات کو معلوم کیا ہوگا کہ بہت سی نیایچ او نکو سوالات
 حل کر نہیں لے سکتے ہیں جو جاتی ہیں کہ جنکی او نہیں تکرار نہیں ہوتی۔ یہ نتائج رائے جو حاصل
 ہوتے ہیں اونکی معنی ہم مثل دفعہ گذشتہ کی بیان کیا کرتے ہیں۔ خواہ لے اور د کچھ ہی ہوں
 قیمتیں لے = ط اور د = ۰ اور مساواتوں میں سے جن میں عمل استقامت کیا ہی ایک مساوات
 کی شرائط کو پورا کریں گی۔ اس باب کو ہم پہلے ہی جانتے ہیں کہ ہماری نتیجہ میں دوسرا جز ضروری
 ضرور ہوگا کہ اسے ہماری مطلب حاصل ہوگا

(۱۴۰) اگر خط ماس کے کچھ ایسا نمود ماس پر نہ ہو بلکہ ایک مستقل اور معین زاویہ ماس کے ساتھ
 بنائی تو یہی اونکی نقاط تقاطع کا مقام النقط ایک خط مستقیم ہوگا۔ ہم سب مراتب
 تحقیقات کے بیان کرتے ہیں

فرض کرو کہ ب اوس زاویہ کو تعبیر کرتا ہی جو درمیان ماس اور اوس خط کی جو ماسک سے کھنچا جای واقع ہی۔ مساوات (۱) تو وہ ہوگی جو دفعہ ۱۳۸ میں تھی اور مساوات (۲) کی جگہ پر جو ب دفعہ ۴ کی یہہ حاصل ہوگی

$$r = \frac{r^2 + \text{مس ب}}{(ل - ط)}$$

$$= \frac{r^2 + \text{مس ب}}{(ل - ط)}$$

اور دفعہ ۱۳۸ کے (۵) کی جگہ پر یہہ م کو حاصل ہوگا

$$r = \frac{r^2 + \text{مس ب}}{(ل - ط)}$$

نتیجہ استقار کا یہہ ہے کہ

$$r = \frac{r^2 + \text{مس ب}}{(ل - ط)}$$

اب دفعہ ۱۳۸ کی ہدایت کی موافق ہم پہلے سے جانتے ہیں کہ $r + (ل - ط) = \text{مس ب}$ ایک جزو ضربی مساوات کی بائیں طرف کا ہی اور دیرینہ اختصار کرنے سے یہہ مساوات حاصل کرینگے کہ

$$r + (ل - ط) = \text{مس ب} - \text{مس ب} = 0$$

پس مقام التقاط مطلوب یہہ حاصل ہوگا کہ

$$r = \text{مس ب} + ط مم ب$$

(۱۴۱) ہمسکہ سے جو عمود قریب البیضوی کے کسی نقطہ کے ماس پر نکالاجے اوسکا طول دریا مساوات ماس کی نقطہ لڈو پر یہہ ہے

$$r = \frac{r^2}{(ل + لڈ)}$$

اور نقطہ (ط و ۰) سے جو عمود نکال لگیا ہی اوسکی مساوات پر جو دفعہ ۴ کی

$$r = \frac{r^2 + \text{مس ب}}{(ل + لڈ)} = \frac{r^2 + \text{مس ب}}{(ل + لڈ)}$$

نقطہ ماس کے بعد ہمسکہ کو ف سے اور عمود شروع سے تعبیر کرو تو

$$\frac{ف}{ل + لڈ} = \frac{ف}{ل + لڈ}$$

(۱۷۲) ہر نقطہ بیرونی سے قریب البیضوی کے دو تماس پہنچ سکتی ہیں

فرض کرو کہ مساوات قریب البیضوی کے یہی ہے کہ

$$r = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (۱)$$

اور ح اور ق محدین نقطہ بیرونی کے ہوں اور فرض کرو کہ ل د و محدین قریب البیضوی کے

ایک نقطہ کی ہوں جس پر تماس قریب البیضوی کو مس کرتا ہو اور یہ تماس نقطہ (ح وق) پر گذرنا ہی تو مساوات تماس (ل د و) کی یہی ہوگی کہ

$$r = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (۲)$$

چونکہ یہ تماس نقطہ (ح اور ق) پر گذرنا ہی تو

$$r = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (۳)$$

اور نیز (ل د و) قریب البیضوی کے ہی محدین ہیں

$$r = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (۴)$$

مساواتین (۳) اور (۴) سے قیمتیں ل د اور و کی متعین ہوتی ہیں

(۴) سے (۳) میں قیمتیں رکھو تو

$$r = \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$یا کہ r = \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2} = 0$$

اس مساوات درجہ دوم کی دو قیمتیں ملن میں آئے کہ (ح وق) نقطہ بیرونی ہی اور آجوا

ق آجوا نسبت $\sqrt{a^2 - b^2}$ کی ہی ہے۔ ہر قیمت کی بموجب (۳) کی قیمت ل د کی ساتھ مطابقت

اسے ثابت ہوا کہ دو تماس نقطہ بیرونی سے کیج سکتے ہیں

جن نقطوں پر یہ تماس قریب البیضوی کو مس کرتی ہیں ان میں جو خط ملا یا جائے وہ تمام بیرونی

(۱۷۳) قریب البیضوی کے تماس ایک نقطہ بیرونی سے نکالی گئی ہیں و تر تماس کی مساوات

فرض کرو کہ ح اور ق محدین نقطہ بیرونی کے ہیں اور نقطہ (ح اور ق) سے جو ایک تماس نکالے

اُس کے نقطہ تماس کے محدین ل د و تماس ہیں اور نقطہ (ح وق) سے جو دوسرا تماس نکالے

اوسکی نقطہ تماس کے محدودین لہم و دہم میں۔ مساوات تماس کی جو (لہم و دہم) میں گذرنا ہی

$$د = ۱ = ۲ ط (لہم + لہم) \quad (۱)$$

چونکہ یہہ تماس (ح وق) میں گذرنا ہی تو ہکو یہہ اصل ہوتا ہے

$$ق = ۱ = ۲ ط (ح + لہم) \quad (۲)$$

اور علی ہذا القیاس اس سبب کہ تماس (لہم و دہم) نقطہ (ح وق) میں گذرنا ہی مساوات

$$ق = ۱ = ۲ ط (ح + لہم) \quad (۳)$$

اسے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ مساوات و تر تماس کی

$$ق = ۱ = ۲ ط (ح + لہم) \quad (۴)$$

اسوے کہ مساوات (۴) ظاہر ہی خط استقیم کی مساوات معلوم ہوتی ہی اور نیز یہہ خط (لہم و دہم)

میں گذرنا ہی اسوے کہ مساوات (۴) کی ان قیمتوں کے کہ لہم = لہم اور دہم = دہم شرائط پوری ہوتی ہی

ان شرائط کا پورا ہونا مساوات (۲) سے ظاہر ہوتا ہی اور علی ہذا القیاس (۳) سے یہہ نتیجہ

نکالتی ہیں کہ خط لہم و دہم میں ہی گذرنا ہی پس اسے معلوم ہوا کہ (۴) مساوات مطلوب ہی

اور اسطرح ہم تماس قریب البیضوی کے ایک نقطہ بیرونی سے کہنچ سکے ہیں کہ خط جو مساوات

(۴) سے تعمیر ہوتا ہی اوسی کچھن اور جن نقطوں پر یہہ خط قریب البیضوی سے بنی اور

اور نقطہ بیرونی میں خطوط وصل کریں تو اسطرح سی خطوط ملائی گئی تماس مطلوب ہونگی

(۱۴۴) ایک نقطہ قائم سے و تر ایک قریب البیضوی کے کہنچ گئے ہیں اور ہر وتر کے انجاموں کے

تماس نکالے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ مقام ان نقاط تماس کے نقاط تقاطع کا ایک خط استقیم

فرض کرو کہ ح اور ق محدودین نقطہ کے ہیں جسے کہ وتر کہنچ گئی ہیں اور ان و تر وں میں سے ایک وتر کے

اطراف سی تماس کہنچ گئی ہیں اور (لہم و دہم) وہ نقطہ ہی جسپر وہ ملتی ہیں تو مساوات و تر تماس

کے اسکی مطابق بموجب دفعہ ۱۴۳ کے یہہ ہوگی کہ

$$د = ۱ = ۲ ط (لہم + لہم)$$

لیکن یہہ و تر (ح وق) میں گذرنا ہی اسوے

$$ق = ۱ = ۲ ط (ح + لہم)$$

اسے معلوم ہوتا ہے کہ (لا و د) اس خط

$$ق د = ۲ (لا + ح)$$

پر واقع ہوتا ہے یعنی مقام النقاط ماسون کی تقاطع کا ایک خط مستقیم ہے

اب ہم اس دعویٰ کو بالعکس ثابت کرتے ہیں

(۱۳۵) اگر ایک خط مستقیم کسی نقطہ سے قریب البضوی کے ماس نکالی جائے تو تمام تر ماس

$$فرض کرو کہ لا + ب د + س = (۱)$$

مساوات خط مستقیم کی ہو اور اس خط میں (لا و د) ایک نقطہ ہو جسے ماس قریب البضوی

تو مساوات وتر ماس کی یہ ہوگی کہ

$$د د = ۲ ط (لا + لا) (۲)$$

چونکہ لا و د مساوات (۱) پر واقع ہیں

$$لا + ب د + س =$$

اسلئے مساوات (۲) اس طرح لکھی جاسکتی ہے کہ

$$د (لا + لا + س) + ۲ ط ب (لا + لا) =$$

$$یا (لا د + ۲ ط ب) لا + س د + ۲ ط ب لا = (۳)$$

اب خواہ کچھ ہی قیمت لاکے ہو یہ خط اس نقطہ پر گذرتا ہے جس کا محدودین ان ہم ساری

مساواتوں سے دریافت ہوتی ہیں کہ لا د + ۲ ط ب = اور س د + ۲ ط ب لا =

یعنی وہ نقطہ جسکی محدودین یہ ہیں کہ د = - ط ب اور لا = س

(۱۳۶) طالب علم کو چاہئے کہ وہ اس مساوات

$$ق د = ۲ ط (لا + ح)$$

کے معانی مختلفہ پر توجہ کرے دفعہ ۱۰۳ میں جو دائرہ کے باب میں بیان ہوا، وہ قریب البضوی

اقطار

(۱۳۷) کسی نقطہ سے سمت معلوم میں جو ایک خط قریب البضوی کے ملتا ہو اکیچا اور کا طول

نقطہ میں گذرتا ہے

کے واسطے اس میں

فرض کرو کہ جس نقطہ سے خط کچا جای اوسکی محدودین لداور دھین اور جس نقطہ تک کچا جائے اوسکی محدودین لداور دھین اور زاویہ میلان خط کا محور لکے ساتھ ہی اور نق طول خط کا پتی تو بموجب دفعہ ۲ کے

(۱) $لد = لد + نق$ $ر = ر + نق$ $جبر = جبر + نق$
 اگر (لد و ر) قریب البیضوی پر ہو تو یہ قیمتیں مساوات $ر = ر + نق$ $لد = لد + نق$ سے یہ ہوگا
 $(ر + نق) جبر = ر + نق$ $ط = ط + نق$ $(لد + نق) جبر = لد + نق$
 نق جب ر + نق (جبر ر - ط جبر) + ر - ط = لد = ۰

(۲) اس مساوات درجہ دوم کے دو قیمتیں نق کی دریافت ہونگیں اور یہ طول خطوط کا ہوگا جو (لد و ر) سے سمت معلوم میں قریب البیضوی تک کچی جائیں
 جب نقطہ (لد و ر) قریب البیضوی کے اندر واقع ہو تو اوپر کے مساوات درجہ دوم کی قیمتیں مختلف ہونگیں اس صورت میں دو خطوط جو (لد و ر) سے قریب البیضوی سے ملے ہوئے کچی جائیں مختلف سمتوں میں ہونگی اور جب نقطہ (لد و ر) قریب البیضوی سے باہر ہو تو قیمتوں کی

ایک ہی علامت ہونگی اور اسلئے خطوط کی ایک ہی سمت ہوگی
 (۱۲۸) حد اوتار متوازیہ کی نقاط وسط کے مقام النقاط کا نام قطر منحنی ہے
 (۱۲۹) ایک مجموعہ اوتار متوازیہ کا قریب البیضوی میں معلوم ہونے والی قطر کو دریافت کرو
 فرض کرو کہ زاویہ میلان اوتار کا محور قریب البیضوی کے ساتھ ہو اور لد و ر محدودین نقطہ وسط کسی وتر کے وتروں میں سے ہوں تو مساوات جسے طول خطوں کا کہ (لد و ر) سے خط منحنی تک کچی جائیں تحقیق ہوتا ہی بموجب دفعہ ۲ کے یہ ہوگا

(۱) $نق جب ر + نق (جبر ر - ط جبر) + ر - ط = لد = ۰$
 چونکہ (لد و ر) نقطہ وسط وتر کا ہے تو قیمتیں نق کی جو مساوات درجہ دوم دریافت ہونگیں مقدار میں مساوی اور علامتوں میں مختلف ہوں گیں اسے معلوم ہوا کہ اشال وتر کے فنا ہونی چاہئے پس

د جب ر - ۲ ط جم ر = ۰

د = ۲ ط مم ر

(۲)

پس قطر مطلوبہ ایک خط مستقیم متوازی محور قریب البیضوی کا ہے

اسے معلوم ہوا کہ ہر قطر متوازی محور قریب البیضوی کا ہی

اور نیز ہر خط مستقیم متوازی محور قریب البیضوی کا قطر ہوتا ہی یعنی مجموعہ اوقات متوازی کی

اسوٹے کر کے مناسبت کی مقرر کرنے سے مساوات (۲) ہر خط مستقیم کو تعبیر کر سکتی ہی جو

محور کا متوازی ہو

(۱۵۰) جس نقطہ پر خط د = ۲ ط مم ر قریب البیضوی ہی ملتا ہی اسے ماس قریب البیضوی کہی جائے

تو مساوات ماس کی یہ ہوگی کہ

$$د = \frac{۲ ط}{(لد + لد)}$$

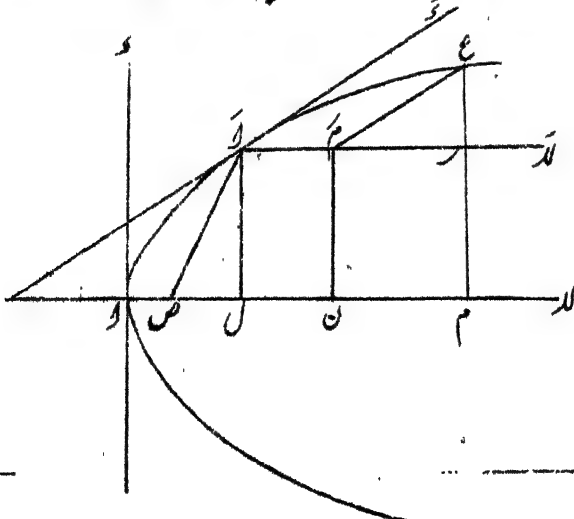
$$د = مس ر (لد + لد)$$

یعنی اسے معلوم ہوا کہ قریب البیضوی کے کسی قطر کے طرف سے ماس کا لدا ہے تو وہ متوازی اول

وزوں کا ہوتا ہی جنکو قطر تضیف کرتا ہی

(۱۵۱) جب قطر اور ماس کہی گیا اس نقطہ سے جہاں قطر قریب البیضوی ہی ملتا ہی

محور خیال کے جائیں تو اس صورت میں مساوات قریب البیضوی کی دریافت کرو



فرض کرو کہ ح اور ق متحدین قریب البیضوی نقطہ کے ہیں اس نقطہ کو مبدأ جدید مقرر کرو اور ^{اسے} ایک خط لے دو متوازی محور خط منحنی کا کمال کر محر لاکا اور لے دو مماس خط منحنی کا نیا محور کا ^{مماس} اور قطر محور حروف

اور زاویہ د ل ل = ر تو بموجب دفعہ (۱۵۰) کے

فرض کرو کہ خط منحنی کے نقطہ ع کے متحدین لا اور ب کا اصلی محور کے ^{خط} = مس ر ^{باعتبار}

محور کے لا اور د ہیں۔ ع م متوازی لے کا اور ع م متوازی لے کا کہچو اور ل اور م ن متوازی لے کا کہچو اور ر نقطہ تقاطع ع م اور لے کا مقرر کرو تو

$$ل د = ل م = ل ل + ل ن + م ن = ل ل + ل م + م ر$$

$$ح = ل د + د ح م ر = ل ل + ل م + م ر$$

ان قیمتوں کو مساوات د = م ط لا میں رکھو تو

$$(ق + د ح م ر) = م ط (ح + ل د + د ح م ر)$$

$$یا د ح م ر + م ر (ق ح م ر) = م ط (ق + ل د + د ح م ر) - م ط ح = م ط ل د$$

لیکن ح = م ط م ر اور ق = م ط ح پس

$$د ح م ر = م ط ل د$$

$$یا د = \frac{م ط ل د}{ح م ر}$$

یہ مساوات مطلوب ہے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $\frac{م ط ل د}{ح م ر} = ص ل$

اس واسطے کہ ص ل = ل د + ح م ر بموجب (دفعہ ۱۲۹) کے اور

$$ح = \frac{ق م ر}{م ط} = ط م ر$$

$$ل د + ح = ط م ر$$

پس معلوم ہوا کہ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے کہ

$$اس میں ط = ص ل اور مقادیر متغیر کے زبروں کو ہم فقط کریں تو$$

(۱۵۲) قریب البیضوی مماس کی مساوات اسی صورت کی ہوگی جس صورت کی ہم پہلی لکھی تھی

خواہ محور قائم الزاویہ ہوں یا قطب اور اس کی طرف سے ہی ماس نکال لیں محور محور ہوں اس واسطے کہ
موجب تحقیقات دفعہ ۱۳ کے مساوات قریب البیضوی کی لمبا ط ان محور دوران کا = ۴ ط ۱۳

(۱۵۳) کسی ترقیب البیضوی کے اطراف سے جو ماس نکال جائے وہ اس قطر پر جو جہلوس وتر کی تقصیف کرتا ہے
اوس قریب البیضوی کی طرف رجوع کرو جس کے محور دوران میں ایک محور قطر ہے

جو اوس وتر کی تقصیف کرتا ہے اور دوسرا ماس ہی جو اس قطر کی طرف نکال لیا ہے
فرض کرو کہ مساوات قریب البیضوی کی یہ ہے کہ

فرض کرو کہ لاؤ محدودین طرف وتر کی مین تو مساوات ماس کی اس نقطہ پر یہ ہوگی
اور محدودین وتر کی دوسری طرف کے یہ مین کہ لاؤ - ک اور مساوات ماس کی یہ ہے کہ
۱ ط ۲ = (لا + لا) (۱) —
۲ ط ۲ = (لا + لا) (۲) —

یہ خطوط جو مساوات (۱) اور (۲) سے تعبیر ہوتی ہیں اوس نقطہ پر ملے ہیں جس کے اندر
اسے دعوی ہمارا ثابت ہے کہ لا = لا

قطبی مساوات

(۱۵۴) مساوات قطبیہ قریب البیضوی کی دریافت کرو جس کا ماس قطب ہی
فرض کرو کہ ص = ع = نق اور لا ص = ع = ر (دفعہ ۱۲۵ کی شکل دیکھو)
تو ص = ع = ر بموجب حدود کے

یعنی ص = ع = ط ص + ص م
یا نق = ۲ ط + نق جم (ک - ر)
نق = (۱ + جم) = ۲ ط

اور نق = $\frac{۲ط}{۱+جم}$
اگر زاویہ لا ص = ع کو زام سے تعبیر کریں تو موافق سابق کے ہر کو یہ حاصل ہوگا کہ
ص = ع = ط ص + ص م

پس $br + b =$ لی حجم

اور نق = $\frac{p_r}{1 - \text{حمر}}$

(۱۵۵) اور نق = $\frac{۲۲}{۷}$ جب راس قطب ہو تو مساوات قطبیۃ فی البیضوی کی مساوات $r = ۲۲$ ط لائین کیا
لاور کے نق اور نق جی ر لکھنے سے یہ حاصل ہو جاتی ہے کہ

نہیں = نہی ط محمدر

اب ہم مسفرقات دعویٰ قریب البینونی کے باب میں لکھتے ہیں

حضرت اشمخر وطنی کے ماسک پر جو تر گزے اوسی و تر ماسک کہتے ہیں

(۱۵۶) قریب البضوی کے کہ فی ترمائے سکہ کی طر فوں سی ماس کہی جائیں تو (۱) ماس خط مستقیم

تقاطع کرنے کے (۲) مماس زاویہ قائمہ رہے گی (۳) اور خط مماس نقطہ تقاطع اور مرا

میں ملایا جاگا وہ نمود ترا سکہ بیہوش

(۱) اگر تماس قرین البیضوی کے نقطہ (موقف) پر ملے تو تین تماسات و تر تماس کی مجموعہ فوس ۴۴ کی پیدائش کی سرنگ

فرض کرو کہ وتر نقطہ اسکے سرگز تاہی تو قسمتہ لا =

فرض کردیم که در نقطه سده پیر که در بالای نویسمین $a = 1$
 باشد: $(c + b) b^2 = 0$.

بعضی ماسوں کی نقطہ تقاطع خط منظر رواقی

(۲) قرب البیضوی کے تماس کی ممکنات بموجب دفعہ

نہ کہ کہ (جو وقت) $\frac{1}{2}$ م = $\frac{1}{2}$ ل + $\frac{1}{2}$ ط

فرض کرو کہ (ح فوق) ماس پر ایک نقطہ ہے
 ∴ (ح م - ۲) ق م + ط = ۰

اس مساوات درجہ دوم وہ میلان معلوم ہونگے جو محور قریب البیاض

خون نقطہ (حوق) سے ماس قریب البیضوی کے مجموعہ

ماس م، دم، مین تو موجب خواص م

فرض کرو کہ ط وہ نقطہ ہے جسے خطوط ط ع و ع اور ط ق ق کے کچے گئے ہیں اور محور قریب البیضوی کے ساتھ زوایا دھ اور ب پر میل رکھتی ہیں تو معلوم ہوتا ہے ثابت کرنا یہی کہ

$$\frac{\text{ط ع} \cdot \text{ط ق}}{\text{ط ع} \cdot \text{ط ق}} = \frac{\text{ج ب} \cdot \text{ا د}}{\text{ج ب} \cdot \text{ا د}}$$

فرض کرو کہ ماس قریب البیضوی کے متوازی ع و ع اور ق ق کے کچے گئے ہیں اور وہ قریب البیضوی ی اور د پر ملے ہیں اور ص ہ کہ ہے تو بموجب دفعہ ۱۵ ا کے

$$\frac{\text{ص ی}}{\text{ص د}} = \frac{\text{ج ب} \cdot \text{ا د}}{\text{ط ع} \cdot \text{ط ق}} \therefore \frac{\text{ط ع} \cdot \text{ط ق}}{\text{ط ع} \cdot \text{ط ق}} = \frac{\text{ص ی}}{\text{ص د}}$$

فرض کرو کہ ط نقطہ ت پر منطبق ہوتا ہے تو ط ع ط ع برابر ت ی اور ط ق ط ق برابر ت د کے ہوتا ہے

$$\therefore \frac{\text{ت ی}}{\text{ت د}} = \frac{\text{ص ی}}{\text{ص د}}$$

مثالین

- (۱) اور ل میں جو خط ملا یا جائی اوسکی مساوات دریافت کرو (دفعہ ۲۴ کی شکل دیکھو)
- (۲) مساوات دائرہ کی جو اول و ل پر گزرتا ہے دریافت کرو (شکل دفعہ ۱۲۶)
- (۳) ایک نقطہ سطح متحرک ہوتا ہے کہ اوسکا ادنیٰ بعد دائرہ معلوم سے برابر ہے اوس بعد کے جو وہ دائرہ معلوم کے ایک قطر معین سے رکھتا ہے تو مقام النقطہ نقطہ کا دریافت کرو
- (۴) $r = ۴ ط ل د$ اور $ل د + ۴ ط ک = ۰$ کے خطوط بھی مرتسم کرو اور ان کے نقاط تقاطع دریافت کرو

(۵) نقطہ ل پر ماس کی مساوات دریافت کرو (دفعہ ۲۴ کی شکل)

(۶) مثلثہ (۱) اور (۵) میں زاویہ میلان دریافت کرو

(۷) نقطہ ل کی عمود الماس کی مساوات دریافت کرو

(۸) وہ نقطہ دریافت کرو جہاں عمود الماس ل دوبارہ خط منحنی سے ملتا ہے اور ان نقطوں کے درمیان

جو وتر واقع ہوا اوسکا طول دریافت کرو

(۹) قریب البیضوی میں ایک نقطہ ایسا دریافت کرو جہاں ماس نکال دیا گیا محور کے ساتھ ہے

کا زاویہ

(۱۰) ماس جو (لاؤ) پہلو اس پر جو خط منظم کی طرف پائین سے نکالاجا اسکا طول ثابت کرو

کہ برابر ہے
(۱۱) نقاط ماس اور ماس کو دریافت کرو جبکہ خط منظم کی طرف پائین سے نکالی گئی برابر ہو

جو تہائی عرض مستقیم کے ہوں

(۱۲) قرب البیضی کا راس لا مرکز ایک دائرہ کا ہی اور اسکا ماس ص ہی اور قطر دائرہ کا

تو ثابت کرو کہ وتر مشترک اص کی تریف کرتا ہی

(۱۳) خط منحنی لا - لا کو متمم کرو اور دریافت کرو کہ آیا خط مستقیم لا + س = ماس

(۱۴) قرب البیضی کے کسی نقطہ سی ماس نکالاجا ہی وہ خط منظم سی اور عرض مستقیم محدود

دونوں نقطوں پر لیگا جسکا بعد ماس سے برابر ہوگا

(۱۵) قرب البیضی کے نقطہ ع کا معین ع م ہی اور ایک خط متوازی محور کا ع م کو تریف کرتا ہی

کہا گیا ہی اور خط منحنی کو نقطہ ق پر قطع کرتا ہی اور ماس م ق کو جو راس سے نکالاجا

نقطہ ت پر قطع کرتا ہی تو ثابت کرو کہ لا ت = س م ع

(۱۶) اگر ایک دائرہ کے کسی نقطہ ع سے ع س اس کے مرکز س میں ملایا جا اور وتر ع ق

متوازی قطر لا س ب کا کہا جائی اور نقطہ ت تریف ہو تو ثابت کرو کہ س ع اور لا کے

نقطہ تقاطع کا مقام النقاط قرب البیضی ہوگا

(۱۷) جن نقطوں پر خط س = م لا + س قرب البیضی سے ملتا ہی اوکلی معین دریافت کرو

پہر اوکلی جو حصہ اس خط کا قرب البیضی کے درمیان تریف ہا ہی اسکی نقطہ وسط کی معین دریافت کرو

(۱۸) لا سب ہی اور ب ایک نقطہ محور دہری اور ب ق محور لا کا متوازی ہی اور لا ق

اور ضرورت کی صورت میں لا ق محدود ہو قطع ایسا مقرر کیا لاء گا کہ ب ق کے ہی تو ثابت کرو کہ

تمام النقاط نقطہ ع کا قرب البیضی ہے

(۱۹) خط ب ق عمود قرب البیضی کے محور س اب پر ہی جسکا راس لا ہی ب ق کے

کسی نقطہ ق سے ع ق متوازی محور کا خط منحنی سے نقطہ ع پر ملتا ہی تو ثبات کرو کہ اگر اس
برابر اب کے بنایا جائے تو خطوط ا ق اور س ع قریب البیضوی پر قطع ہونگی

(۲۰) نقطہ (لہ وئی) سے عمود المماس کھینچا گیا ہی تو محدودین اوس نقطہ کے دریافت کرو جہاں
خط منحنی سے دوبارہ ملتا ہی اور طول وتر کا جو اسکی بائیں واقع ہوتا ہی

(۲۱) اگر عمود المماس نقطہ ع کا خط منحنی سے دوبارہ نقطہ ق پر ملتا ہی اور ص ع = م ی اور
نقطہ ع کے مماس پر جو عمود ص ہی کا لگا دے ہو ق ع ق = م ی - م ق

(۲۲) قریب البیضوی م ی ع ایک نقطہ ہی اور ل ر اس ہی اور نقطہ ل سی عمود مماس پر نقطہ
ع پر س کرتا ہی نکال لگایا ہی اور نقطہ س سی ایک خط متوازی محور کا نکال لگایا ہی اور اس طرح سے

خطوط کھینچے گئے نقطہ ق پر ملے ہیں تو ثبات کرو کہ مقام النقاط نقطہ ق کا خط مستقیم ہی اور نیز مساوات
مقام النقاط ق کی ہی دریافت کرو اور ق نقطہ تقاطع عمود کا جو ل سے کھینچا جائے اور معین نقطہ ع کا

(۲۳) ع ق وتر قریب البیضوی کا ہی ع مماس نقطہ ع پر اور ایک خط متوازی محور قریب البیضوی
کا مماس کو نقطہ ت پر اور قوس ع ق کو نقطہ ی پر اور وتر ع ق کو نقطہ ف پر قطع کرتا ہی تو ثبات کرو

ت ی : ی ف : ع ف : ف ق

(۲۴) قریب البیضوی میں جب کی مساوات $ر = م ط ل$ ہی اوسکی دودو مماس کھینچے گئی ہیں ان نقطہ
جبکی محدودین میں نسبت ا : ل وہی تو ثبات کرو کہ انکی تقاطع کی مقام النقاط کی مساوات ذیل ہوگی

جب نقطہ محور و کے ایک ہی جانب میں ہوں $ر = (نق + نو) ط ل$ اور جب نقطہ
مختلف جانب میں ہوں تو یہ مساوات ہوگی کہ $ر = (نو - نق) ط ل$

(۲۵) ایک قریب البیضوی کی راس سے دو خطوط مستقیم عمود ایک دوسرے پر کھینچے گئے ہیں اور
خطوط جن تقاطع پر قریب البیضوی سے ملے ہیں انہیں خط ملایا گیا ہی اور نتیجہ ایک مثلث

قائم الزاویہ بنایا گیا ہی تو رقبہ اس مثلث کا کم از کم دریافت کرو
(۲۶) م ق اور ن ق طولی دو نصف قطر دائرہ کا ہی جو ایک دوسرے پر زاویہ قائم بنا رہے ہیں اور

قریب البیضوی سی کمی گئی ہیں تو (نق نق) $\frac{1}{2} = 16$ ط (نق نق + نق) (نق نق)

(۲۷) سابق قریب البیضوی کی قطبیہ اوس حالت میں دریافت کرو کہ خط منظم کی طرف بائیں مندرجہ اور محور خط منظم کا مقام ابتدائی ہو

(۲۸) اگر خط منظم کی طرف بائیں ہی ایک خط کھینچا گیا قریب البیضوی کو قطع کری تو جو خط منحنی حصص بائیں اس خط کی ہنگی او نی سطح برابر ہوگی اور جو حصص کے سطح کے حصص وتر متوازنہ ماسکے تقسیم ہوتا ہی

(۲۹) قریب البیضوی کی مساوات قطبیہ اوس حالت میں دریافت کرو کہ طرف بائیں خط منظم کی اور مقام ابتدائی خط منظم ہو

(۳۰) قریب البیضوی میں مجموعہ اوتار متوازنہ کا کھینچا گیا ہی اوس نقطہ کا مقام التقاط دریا جوان و تروان کو ایسی حصوں میں تقسیم کرتا ہی کہ او تقاطع حاصل ضرب ایک مقدار مستقل ہو

(۳۱) مثلث اب س میں اگر مس اس $\frac{1}{2} = 2$ اور اب قائم ہو تو نقطہ س کا مقام ایک قریب البیضوی ہوگا جس کا راس ایسی اور ماسکے ہی

(۳۲) عرض مستقیم کے اطراف سی جو ماس نکالے جائیں او نکو محور قرار دیکر قریب البیضوی

(۳۳) ماس نقطہ ل اور عمود الماس کو محور قرار دیکر مساوات قریب البیضوی کی دریافت

(۳۴) قریب البیضوی کے نقطہ ع کے لہو محمدین میں تو مساوات اوس دائرہ کی دریافت کرو جو قطر ص ع پر متم ہو

(۳۵) ثابت کرو کہ دائرہ جو قطر ص ع پر متم ہوگا راس کی ماس کو مس کرتا ہی

(۳۶) اگر خط $r = m$ (ل-ط) قریب البیضوی سی (ل-د) (ل-د) پر ملتا تو ثابت کرو کہ $ل + ل = ط + ط$ اور $ل + ل = ط + ط$ اور $ل + ل = ط + ط$ اور $ل + ل = ط + ط$

(۳۷) وتر ماسکے قریب البیضوی پر دائرہ کھینچا گیا ہی اس طرح سی کہ وتر اوس کا قطر ہی اگر م ماس زاویہ میلان اس وتر اور محور ل کا ہو تو مساوات دائرہ کی سیہ ہے کہ

۱۲ - ۲ ط (۱ + ۲) = ۳ - ۲ = ۱

(۳۳) دائرہ جو وتر کا کہ قطر بنا کر کھینچا جائے خط منظم کو کس کرتا ہے

(۳۴) اگر قریب البیضوی کا کہ سید ہو تو ثابت کرو کہ مساوات قریب البیضوی کی یہ ہوگی کہ
 وتر = ۲ ط (۱ + ۲ ط) (۱ + ۲ ط)

(۳۵) اگر قریب البیضوی کا کہ سید ہو تو ثابت کرو کہ مساوات قریب البیضوی کی یہ ہوگی کہ
 ۵ = م (۱ + ط) + ۲ ط

(۳۶) دو قریب البیضوی متحد الماس کہ میں ماس ایک دوسرے کے ماس اور او قیامہ پر قطع کرتا ہے
 تو منہ ان نقاط نقطہ تقاطع کا دریافت کرو

(۳۷) اگر دائرہ قریب البیضوی ۲ = ۴ ط کا ماس قریب البیضوی ۲ = ۸ ط (۱ + ۲ ط) کا
 ہو تو ثابت کرو کہ ۱۰ = ۳ ط + ۲ ط

(۳۸) کسی دائرہ سے بیرون سے زیادہ عمود الماس قریب البیضوی کی نہیں کھینچ سکتی

(۳۹) قریب البیضوی میں جس کی مساوات ۲ = ۴ ط ہے اوں میں نقطوں کی جتنی عمود الماس
 ایک نقطہ پر ملے ہیں کہ وہ ۴ م + ۲ م = ۱۰ اور ثابت کرو کہ

دائرہ جو ان تین نقطوں پر گزرتا ہے قریب البیضوی کی راس پر گزرتا ہے

(۴۰) اگر دو عمود الماس ایک نقطہ سے ملے گئے ہوں تو اس میں ایک دوسرے کی ساتھ زوایا قائمہ نہیں
 مقام التقاطع اوس نقطہ کا قریب البیضوی ہوگا

(۴۱) اگر دو متساوی قریب البیضوی متحد الماس کہ میں اور او کی دو عمود عمود ہوں تو اوں کی
 ایک سطح ہوگی جس کا طول ع ق = دو چند عرض شقیق کے اور عرض = عرض شقیق

(۴۲) نقطہ بیرونی (ع و ق) سے عمود جو اس نقطہ کی ہوں کہ وتر ماس پر کا لجا اوس کا
 (۴۳) نقطہ بیرونی (ع و ق) سے دو ماس قریب البیضوی کے کہ میں تو ثابت کرو کہ

$$(ق + ۴ ط + ۲ ط) (ق - ۴ ط + ۲ ط)$$

طول وتر ماس کا

(۴۴) نقطہ بیرونی (ع و ق) سے دو ماس قریب البیضوی کے کہ میں تر و ثلث کا جو

(ق - ۴ ط ح) ۱۲۲ سوگا

(۵۰) ایک وتر ماسک کے اطراف ہی سے اور $\frac{1}{2}$ ط ح اور $\frac{1}{2}$ ح اور $\frac{1}{2}$ ح عمود الماس
اور نہایتوں کے ہیں تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{2}$ ح + $\frac{1}{2}$ ح ایک مقدار متساوی ہے اور عمود الماس کے محاذی
زاوی نقطہ ت پر برابر ہیں

(۵۱) دو مساوی قریب البیضوی متحد المحور ہیں لیکن اوکلی کے منطبق نہیں ہوتی اور اندر کے منحنی
کوئی نقطہ ط لیکر دو وتر برابر کے خط منحنی کے ط ح اور ق ط ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ
قائم باقی ہوئی کچھ ہیں تو $\frac{1}{2}$ ط ح + $\frac{1}{2}$ ق ط ایک مقدار متساوی ہے
(۵۲) قریب البیضوی کے وتر برابر کے گھاگیا محور کو مس کرتا ہی تو ثابت کرو کہ اگر زاویہ سیلان
وتر کا محور کے ساتھ ہو اور $\frac{1}{2}$ ط عرض مستقیم قریب البیضوی کا ہو اور نصف قطر دائرہ کا ہو تو
مس ر = $\frac{1}{2}$ ط ح

(۵۳) اگر راور زاوی سیلان محور قریب البیضوی اور دو ماسوں کے ہوں جو نقطہ (ح وق) پر
تو ثابت کرو کہ مس ر + مس ر = ق ح اور مس ر س ر = $\frac{1}{2}$ ط ح

(۵۴) اگر دو ماس قریب البیضوی کے کچے جائیں ایسی کہ مجموعہ زاویوں کا جو وہ محور کے ساتھ
بنائیں متساوی ہو تو اوکلی تقاطع کا مقام النقاط ایک خط مستقیم ہوگا جو ماس کے مرکز گزیر گا
(۵۵) ثابت کرو کہ دو ماس نقطہ (ح وق) پر جو گزرتی ہیں اس مساوات سی تعبیر ہوتی ہیں کہ

$$ح (د - ق) - ق (د - ق) + ط (لا - ح) = ۰$$

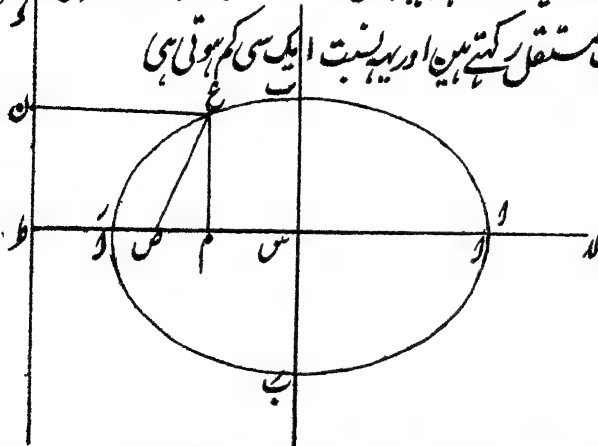
$$یا (ق - ۴ ل ح) (د - ۴ ط لا) = [ق - د - ۴ (لا + ح)]$$

(۵۶) (ح وق) سے جو ماس قریب البیضوی کی کچے جائیں اور اوکلی نقطہ ط ماس اور
خط ط ملائیں جائیں تو وہ اس مساوات سی تعبیر ہونگے کہ
ح د = ۴ (ق - د - ۴ ط لا)

باب ہفتم
مربعیضوی

(۵۸) مساوات بیضوی کی دریافت کرو

بیضوی مقام النقطہ ایک نقطہ کا ہوتا ہے جو سطح حرکت کرنا ہی کہ ایک نقطہ معین اور خط معین
اوسکی فاصلے نسبت مستقل کہتے ہیں اور یہ نسبت ایک سی کم ہوتی ہی



فرض کرو کہ ص نقطہ معین اور د خط معین ہے ص ط عمود د کے پر نکالو اور ط مبداء اور ط ص سمت محور لگائی ہے اور ط سمت محور د کی مانو

فرض کرو کہ ع ایک نقطہ مقام النقطہ کا ہی ملاؤ ص ع اور ع م متوازی ط کا اور ع ن متوازی
ط لا کا نکالو اور فرض کرو کہ ط ص ع اور ص ع اور ع ن کی نسبت کوئی سی تعبیر کرو اور نقطہ
ع کے محدین کو لا اور د سے تعبیر کرو

بموجب حدود کے $ص ع = ی \cdot ع ن$

$\therefore ص ع^2 = ی^2 \cdot ع ن^2$

$\therefore ع م^2 + ص م^2 = ی^2 \cdot ع ن^2$

یعنی $د^2 + (لا - ع)^2 = ی^2 لا^2$

اس مبداء اور محور کے موافق جو ہم نے فرض کی ہیں یہ مساوات بیضوی کی ہوگی

(۵۹) مساوات بیضوی کی اطلال میں کہ وہ محور لائی ملتی ہو دریافت کرو د = کی مساوات

بیضوی میں لکھو تو

$(لا - ع)^2 = ی^2 لا^2$

$\therefore لا - ع = \pm ی لا$

$\therefore لا = \frac{ع}{\pm ی}$

فرض کرو کہ ط $\frac{ع}{۱+ع}$ اور ط $\frac{ع}{۱-ع}$ تو لاوا نقطہ بیضوی پر موقوفی لا اور
 لا کو بیضوی کی اس کہستی میں اور لا کی درمیان جو نقطہ وسط ہوتا ہے اسے مرکز بیضوی
 (۱۶۰) مساوات بیضوی کی آسان صورت مبد کو لا یا میں تبدیل کر دریافت کرتی ہیں
 اول فرض کرو کہ مبد $\frac{ع}{۱+ع}$ ہے

چونکہ ط $\frac{ع}{۱+ع}$ اور قیمت لا $\frac{ع}{۱-ع}$ کو مساوات

$$۲ + (لا - ع) = ی \quad لا \text{ میں رکھو تو}$$

$$۲ + (لا - \frac{ع}{۱+ع}) = ی \quad (لا + \frac{ع}{۱+ع})$$

$$یا ۲ + (لا - \frac{ع}{۱+ع}) = ی \quad (لا + \frac{ع}{۱+ع})$$

$$۲ + لا - \frac{ع}{۱+ع} = ی \quad (لا + \frac{ع}{۱+ع})$$

$$۲ = ع - لا \quad (۱ - ی) لا$$

$$= (۱ - ی) (لا - \frac{ع}{۱+ع})$$

بعد لا $\frac{ع}{۱+ع} - \frac{ع}{۱-ع}$ اس کو ہم اگر ط سی تعبیر کریں تو مساوات کی یہ صورت ہو جائیگی

$$۲ = (۱ - ی) (۲ ط - لا)$$

مبد کو اس لا پر یاد رکھ کر زیر لار سے اڑا دو تو مساوات یہ حاصل ہوگی

$$۲ = (۱ - ی) (۲ ط - لا) \quad (۱)$$

دوم فرض کرو کہ س مبد ہے

$$۲ = (۱ - ی) (۲ ط - لا) \quad (۱)$$

چونکہ لا $\frac{ع}{۱+ع}$ = ط ہم قیمت لا $\frac{ع}{۱-ع}$ کو مساوات (۱) میں رکھیں تو

$$۲ = (۱ - ی) (۲ ط - لا) \quad (۱)$$

اگر مبد کا مرکز یہ ہو نا یا در کہہ کر لاری زیر کو الگ کریں تو مساوات کی یہ صورت ہوگی

$$۲ = (۱ - ی) (۲ ط - لا) \quad (۲)$$

(۲) میں فرض کریں لا = ۰ تو $۲ = (۱ - ی) ط$ اور یہ ہم معین س ب کو ص سے

تعبیر کریں تو ص = (۱ - ی) ط ایس (۱) کی صورت یہ ہوگی کہ

(۳) ————— $\frac{ص}{ط} = \frac{ص}{ط} (ط - ل)$

(۴) ————— اور (۲) کی یہ صورت ہوگی کہ $\frac{ص}{ط} = \frac{ص}{ط} (ط - ل)$

(۵) ————— یا زیادہ بالآخر $\frac{ص}{ط} + \frac{ل}{ص} = \frac{ص}{ط} + \frac{ل}{ص} = \frac{ص}{ط} + \frac{ل}{ص} = \frac{ص}{ط} + \frac{ل}{ص}$
 (۱۶۱) چونکہ $ا = ص$ $ی$ $ط$ اور $ط$ $ا = \frac{ع}{ا + ی}$ اسے ہکو بیہ حاصل ہوتا ہے کہ

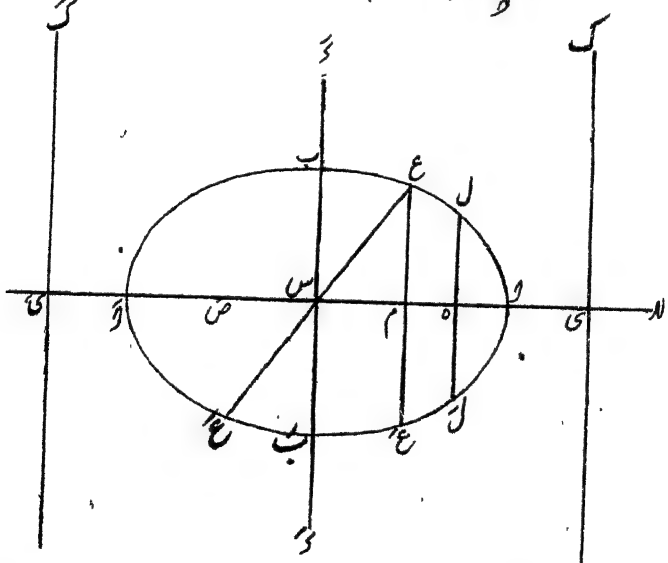
$$ا = ص = \frac{ی ع}{ا + ی} = \frac{ی (ی - ۱)}{ی} = ط (۱ - ی)$$

$$ط = ا = \frac{ع}{ا + ی} = \frac{ع}{ی}$$

نہیں $ا = ص - ا = ط - ط = (۱ - ی) ط$
 ط $ا = ص + ط = ا = ط + ط = ط (۱ - ی) = ط$
 ط $ص = ع = ط (۱ - ی)$

(۱۶۲) اب ہم شکل بیضوی کی ہیئت دریافت کرتے ہیں۔ مساوات جسمیں بد مرکز ہو لکھو

(۱) ————— $\frac{ص}{ط} = \frac{ص}{ط} (ط - ل)$



ا کی قیمت کے واسطے جو ط سے کم ہو کر کی دو قیمتیں میں جو مقدار میں وی اور علامت میں تخت
 اسے معلوم ہوا کہ اگر $ع$ ایک نقطہ ط منحنی کے ایک جانب میں محور $ل$ کی ہو تو ضرور دوسرے نقطہ

محور لک کی دوسری جانب مقابل میں ایسا ہوگا کہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ عم کی ہوا سے معلوم ہوا کہ لمبا محور لک کے
خط منحنی قرینہ رکھتا ہے۔ جو قیمتیں لک کی طوسی زاویہ ہوں اور لک کے وسطے کوئی قیمت ممکن ہے کی
نہیں نکلتی اسے ثابت ہوا کہ اس آچونکہ برابر ط کی ہے اسلئے خط منحنی نقطہ آ کی جانب رست
میں نہیں پہنچتا

اگر لک کی قیمتیں منفی اور ط کے درمیان مقرر کریں تو ہمو کی قیمتیں ایسی ہی دریافت ہوں گیں جس کی
لک کی مثبت قیمتیں اور ط کے درمیان مقرر کرنے سے حاصل ہوئی تھیں۔ اسے ثابت ہوا کہ خط
منحنی کے حصے د کے دائیں بائیں مشابہ اور ایک صورت کے ہیں اور چونکہ مساوات (۲)
کی اس صورت میں لکھی جاسکتی ہے کہ

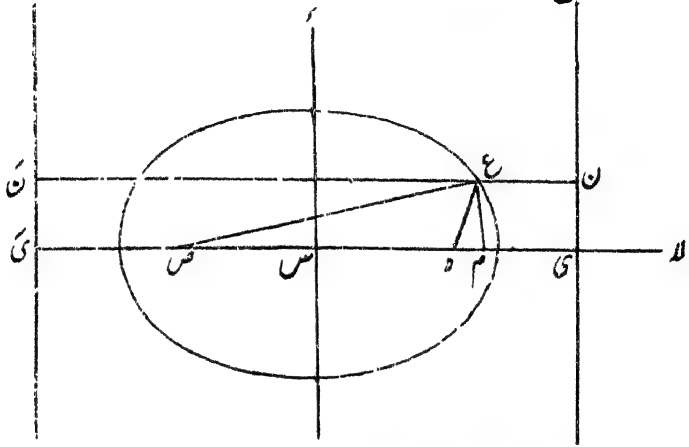
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (ص - د) \quad (۲)$$

اسے معلوم ہوا کہ محور یہی خط منحنی کو قرینہ کے ساتھ تقسیم کرتا ہے اور خط منحنی نقاط ب و ب سے
پر نہیں پہنچتا ہے۔ سب اور سب ہر ایک = ص کی ہی
خطی کے خط منظم ہے اور ص اس کی مطابق ماسکے ہی

چونکہ خط منحنی لمبا ط د کے قرینہ سے واقع ہے اس لیے نتیجہ پیدا ہوتا ہے کہ اگر ہم سہ = ص
کے اور سہ = ص کی مقرر کریں اور سہ کی عمود سہ کی پر نکالیں تو نقطہ ہ اور خطی کے
دوسرا ماسکے اور خط منظم ہے گا اور اس سلطت سی ہی خط منحنی پیدا ہو سکتا ہے
(۱۶۳) نقطہ س کا نام مرکز بیضوی اس لیے ہے کہ ہر ایک تر بیضوی کا جو نقطہ س پر گذرتا ہے
اوستیضیف ہوتا ہے۔ اور اس تیضیف ہونے کی دلیل یہ ہے کہ (د) ایک نقطہ خط منحنی پر

فرض کرو تو مساوات $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
کے شرائط ان قیمتوں کے کہ ل د ص اور د = ق پوری ہوتی ہیں تو (د) و (ق) یہی ایک
منحنی پر ہوگا اسلئے کہ ل د ص اور د = ق شرائط مساوات کو پورا کرتی ہیں تو ظاہر ہے کہ
ل د = ص اور د = ق کی یہی مساوات کی شرائط کو پورا کرتی ہیں اسلئے معلوم ہوا کہ خط

(۱۶۱) کسی نقطہ بیضی کی ابعاد ہلکے کو اوس نقطہ کے معین کی قانون میں بیان کرو



فرض کرو کہ ص نقطہ ہلکے ہو اور ی ک خط قطب ہو اور ہ دوسرا ہلکے ہو اور اوسکی قانون میں اسکی خط نقطہ بیضی پر نقطہ ع ہو اور لا د اوسکے محدین ہوں اور مرکز اوسکا مبد ہو ملاؤ ص یا اور ہ ع اور ک ع ن توازی محور اعظم کا کیجو اور ع م نمود اوس پر نکالو

تو ص ع = ی ع ن = ی (ن س + س م) = ی (ط ی + ی ل) = ط ی + ی ل
اور نیز ہ ع = ی ع ن = ی (س ی - س م) = ی (ط ی - ی ل) = ط ی - ی ل
اسے معلوم ہوا کہ ص ع + ہ ع = ط یعنی بیضی کے کسی نقطہ کی ابعاد ہلکے کا مجموعہ برابر محور اعظم کے ہوتا ہے

$$(۱۶۷) مساوات ۱ = \frac{ص}{ط} (ط - ل) \text{ اس طرح لکھی جاسکتی ہے کہ } ۲ = \frac{ص}{ط} (ط - ل) (ط + ل)$$

(منگل دفعہ ۱۶۲ کی دیکھو) ع م = س
(۱۶۸) بیضی کے محور اعظم پر دائرہ کھینچا جائے تو اوسکی مرکز کو مبد و قرار دیں تو اوسکی مساوات ہوگی
 $۲ = ط - ل$

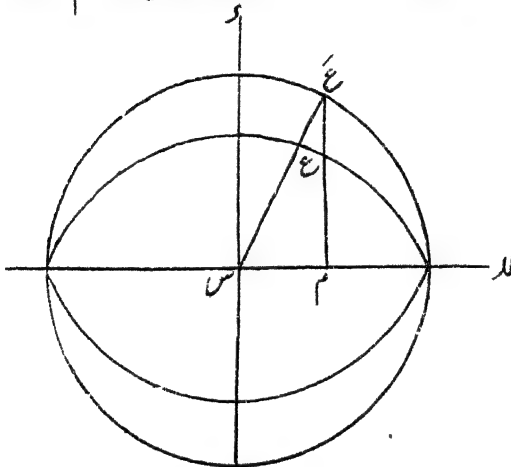
اسے معلوم ہوا کہ معین م ع بیضی کا خارج ہو کر دائرہ سے ع پر ملے تو

$$\text{تو ع م} = \frac{\text{ص ع م}}{\text{ط ع م}}$$

ع اور س مرکز بعضوی کے درمیان خط ملاؤ اور فرض کرو کہ ع س م = براون نقطہ ع کی محدودین

$$\text{لا اور ر ہیں تو لا} = \text{س ع م} = \text{ط ع م}$$

یہہ قیمتیں لا اور ر کی بعض اوقات سوالات کے حل کرنے میں کام آتی ہے



زاویہ ع س م کو زاویہ خارج المکرر نقطہ ع کا کہتے ہیں

(۱۶۹) دفعہ ۱۶۰ کے موافق مساوات بعضوی کی جسکا اس مبدء ہو

$$\text{ر} = \text{ع م} - (۱ - \text{ی}) \text{ لا}$$

اگر ہم فرض کریں کہ ی = ۱ تو اس مساوات کی یہہ شکل ہو جاگی

$$\text{ر} = \text{ع م}$$

یہہ مساوات قریب البعضوی کی ہی جسکا عرض مستقیم ع ہی اور نیز بعضوی میں

$$\text{ط} = \frac{\text{ت ع م}}{۱ - \text{ی}} \text{ اور ص} = \text{ط} - \text{لا} = \frac{\text{ع م}}{۱ - \text{ی}}$$

$$\text{لا یا ط} = (۱ - \text{ی}) \frac{\text{ع م}}{۱ - \text{ی}}$$

اگر ہم ی = ۱ کے مقرر کریں تو ط اور ص لا انتہا ہونگے اور

$$\text{ط} = (۱ - \text{ی}) \frac{\text{ع م}}{۱ - \text{ی}}$$

پس اگر ہم فرض کریں کہ اس اور اسکے قریب کے درمیان بحد متصل ہی اوجیت خارج اکثر ہمیشہ ایک کی قریب ہوتی جاتی ہے اور محور اعظم و اصغر بضوی کے لدا انتہا زیادہ ہوتی ہی تو بضوی کی شکل قریب البضوی کی سی ہوتی جاگی

اسے معلوم ہوا کہ جو خاصیت بضوی کی ثابت ہوا اسی کی متماثل خاصیت قریب البضوی میں تلاش کرنی اور اس تلاش میں کہ اس بضوی مبدیہ ہوا جایی اور یہہ دیکھا جایی کہ اگر ہمیشہ اکی قریب ہوتی جاتی ہی اور بعد اس اور اسکے قریب کی درمیان ہمیشہ متصل رہتا ہی تو کیا کیا نتائج پیدا ہوتی ہیں

ماس اور محمود الماس بضوی

(۱۷۰) بضوی کے کہ نقطہ پر جو ماس ہوا اوسکی مساوات دریافت کرو (دفعہ ۹۰ کا حدود دیکھو)

فرض کرو کہ $ل$ و $ر$ نقطہ کی محدین ہوں

$ل$ و $ر$ متصل کے نقطہ کے محدین اوسی خط منحنی پر ہوں
تو خط قاطع مساوات جو ان نقطوں پر گزرتا ہی یہہ ہوگی کہ

$$ر - ز = \frac{ل - ل}{ل - ل} \quad (۱)$$

اور چونکہ $(ل و ر)$ اور $(ل و ز)$ نقطے بضوی پر ہیں تو

$$ط' ز' + ص' ل' = ط' ص'$$

$$ط' ز' + ص' ل' = ط' ص'$$

$$\therefore ط' (ز' - ل') + ص' (ل' - ل') = ۰$$

$$\therefore \frac{ز' - ل'}{ل' - ل'} = - \frac{ص'}{ط'}$$

اسے ثابت ہوا کہ مساوات (۱) اس طرح لکھی جاسکتی ہی کہ

$$ر - ز = - \frac{ص'}{ط'} \cdot \frac{ل' + ل'}{ز' + ل'}$$

لیکن مقام محدودہ میں $ل' = ل$ اور $ز' = ز$ اسے معلوم ہوا کہ مساوات ماس کے

$(ل و ز)$ کے نقطہ پر یہہ ہوگی کہ

$$ط' ز' + ص' ل' = ط' ل' + ص' ز' = ط' ل' + ص' ز' = ط' ص'$$

باب نہم (۱۷۱) یکہ مساوات ماس کی اوس زاویہ کی ماس کی رقمون میں جو خط محور اعظم مضیوی
 ۱۳۱ ماس اور عمود الماس مضیوی
 سے بناتا ہی نہایت آسانی سی بیان ہو سکتی ہے

اس واسطے کہ مساوات ماس کی (لد و ز) پر یہ ہے کہ

$$\text{طا} + \text{ص} = \text{لد} = \text{طا} + \text{ص}$$

$$\text{یعنی } \text{ز} = \text{ص} - \text{طا}$$

اب فرض کرو کہ - $\text{ص} = \text{م}$ تو مساوات یہ ہو جائیگی کہ

$$\text{م} = \text{م} + \text{لد}$$

پس اب ہم کو ص کو ماس کی رقمون میں بیان کرنا باقی رہا

$$\text{اب } \text{ص} = \text{لد} = \text{طا} + \text{م} - \text{طا} = \text{م}$$

$$\text{یعنی } \text{ز} = (\text{طا} + \text{م}) - \text{طا} = \text{م}$$

$$\text{یعنی } \text{ص} = (\text{طا} + \text{م}) - \text{طا} = \text{م}$$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات ماس کی سطح لکھی جاسکتی ہے کہ

برعکس کے جس خط کی مساوات اس صورت کی ہو وہ ماس مضیوی کا ہی دفعہ ۹۳ و ۹۴ کی
 طرح سے ثابت ہو سکتا ہی کہ بیضوی کے کسی نقطہ پر ماس مضیوی سے صرف ایک نقطہ پر
 ملتا ہی اور جو خط بیضوی سے ایک نقطہ پر ملتا ہی وہ بیضوی کا ماس اوس نقطہ پر ہے
 (۱۷۲) ایک محور کی اطراف سے جو ماس مضیوی کے نکالی جائیں وہ متوازی دوسرے محور کے

اس واسطے کہ محدین نقطہ آ کے ط اور ۰ میں شکل دفعہ ۹۲ کی دیکھو اسے معلوم ہوا کہ

$$\text{لد} = \text{ط} + \text{ز} = ۰ \text{ کے لگنے سے مساوات}$$

$$\text{طا} + \text{ص} = \text{لد} = \text{ط} + \text{ز} \text{ کی یہ صورت ہو جائیگی کہ}$$

یہ مساوات اوس خط کی ہے جو نقطہ آ سے متوازی س - کا ہی - علیٰ ہذا القیاس ماس

نقطہ آ پر متوازی س - کا ہی اور ماس نقاط ب اور ب پر متوازی س - کے مین
 (۱۷۳) بیضوی کے کسی نقطہ کے عمود الماس کی مساوات دریافت کرو (دفعہ ۹۷ کی حد تک)

فرض کرو کہ کسی نقطہ کے محدین لڈو کہ مین تو مساوات ماس کے اوس نقطہ پر یہ ہوگی کہ

$$r = \frac{ص \times لڈ}{ط \times ص} + \frac{ص}{ط} \quad (۱)$$

اور مساوات اوس خط کی جو لڈو کے مرکز پر گزرتا ہی اور عمود مساوات (۱) پر یہی یہ ہوگی کہ

$$r - r' = \frac{ط \times لڈ}{ص \times لڈ} (لڈ - لڈ') \quad (۲)$$

یہ مساوات عمود الماس نقطہ (لڈ وڈ) کی ہے

(۱۴) مساوات کسی نقطہ کی عمود الماس کی اوس زاویہ کی ماس کی رقموں میں جو خط

محور اعظم بضوی کی ساتھ بنا تا ہی نہایت آسانی سے بیان ہو سکتی ہی

مساوات عمود الماس نقطہ (لڈ وڈ) کی

$$r = \frac{ط \times لڈ}{ص \times لڈ} - (1 - \frac{ط}{ص}) r' \quad (۱)$$

فرض کرو کہ $\frac{ط}{ص} = م$ تو مساوات اس شکل کی ہو جاگی کہ

$$r = م لڈ - \frac{ط \times ص}{ص} r' \quad (۱)$$

پس اب $\frac{ط \times ص}{ص} r' = م$ کو م کی رقموں میں بیان کرنا رہا

$$اب \quad ص \times لڈ = ط \times ر'$$

$$اور ط \times ر' + ص \times لڈ = ط \times م$$

$$\therefore ط \times ر' = ط \times م - ط \times لڈ$$

$$\therefore ر' (ص \times م) = (ط \times م - ط \times لڈ)$$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات (۱) یہ ہو جاگی

$$r = م لڈ - \frac{ط \times (ص \times م - ط \times لڈ)}{ص \times م}$$

(۱۵) اب ہم دفعات گذشتہ سے بعض خواص بضوی کے استنباط کرتے ہیں

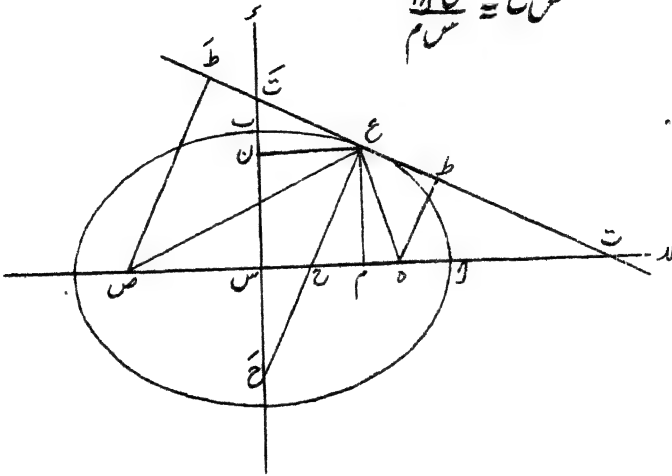
فرض کرو کہ لڈو کے محدین نقطہ کی مین اور عات ماس نقطہ پر ہے اور عات عمود الماس

نقطہ پر ہے اور عات عمود محوروں پر مین

باب نہم ۱۳۳
تو مساوات ماس کی نقطہ پر ہے کہ

$$ط \times د + ص \times ل = ط \times ص$$

فرض کرو کہ، = . تو لا = $\frac{ط}{ص}$ اسے معلوم ہوا کہ
ست = $\frac{ط \times د}{ص \times م}$



$$: سم . ست = س د$$

اور علیٰ ہذا القیاس اگر ماس نقطہ ع پر س د سے نقطہ ج پر ط تو

$$سن . ست = س ب$$

(۱۷۴) نقطہ ع کے عمود الماس کی مساوات یہہ ہی کہ

$$د - د = \frac{ط \times ح}{ص \times ل} (ل - ل)$$

اور نقطہ ج حسیہ عمود الماس محور اعظم کو قطع کرتا ہی اسکے لئے د = . اسے ثابت ہوا کہ

مساوات بالا سے یہہ جاہل ہوتا ہی کہ

$$ل - ل = \frac{ط \times ح}{ص \times ل}$$

$$: ل = ل (۱ - \frac{ط}{ص}) = ی ز$$

$$پس س ج = ی . ط م$$

اور نقطہ ج پر عمود الماس محور اصغر کو قطع کرتا ہی تو لا = . اسے معلوم ہوا کہ مساوات بالا

$$د = ز - ط = \frac{ط \cdot ح}{ص} = \frac{۱۳۴}{ص}$$

(۱۷۷) طول رخ اور رخ کا نقطہ ع کے ابجد ماسک کی رقموں میں آسانی سے پایا جاتا ہے

$$ع ح = ع م + ح م$$

$$= ز + (لد - ی اللہ)$$

$$= ز + (لد - ا - ی)$$

$$= ز + \frac{ص اللہ}{ط}$$

$$= \frac{ص}{ط} (ط - لد) + \frac{ص}{ط} لد$$

$$= \frac{ص}{ط} [ط - (۱ - \frac{ص}{ط}) لد]$$

$$= \frac{ص}{ط} (ط - ی اللہ)$$

فرض کرو کہ ص رخ = مئی اور ع = فی تو

$$مئی = ط + ی اللہ اور ی = ط - ی اللہ$$

$$\text{پس } ع ح = \frac{ص مئی}{ط}$$

علیٰ ہذا القیاس یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$ع ح = \frac{ط مئی}{ص}$$

(۱۷۸) کسی نقطہ کے ابجد ماسک کے درمیان جزا دیہوتا ہاؤس کو کسی نقطہ کا عمود الماس بتا کر

فرض کرو کہ لد و ز محدب نقطہ کی ہیں اور محدبین جن کے - ط ی اور ہ میں اسے معلوم ہوا کہ مساوات میں ع کی موجب دفعہ ۵ کے

$$د = \frac{ط + ط ی}{لد + ح ی} \dots \dots (۱)$$

مساوات عمود الماس نقطہ ع کی یہ ہے کہ

$$د = ز = \frac{ط + ز}{ص اللہ} (لد - لد)$$

اسے معلوم ہوا کہ ماس زاویہ ح ص ع کا

$$\frac{(ط - ص) (ل - ط) + ط (ل - ط)}{(ط - ص) (ل - ط) + ط (ل - ط)} = 1$$

$$\frac{ط (ل - ط)}{(ط - ص) (ل - ط) + ط (ل - ط)} = \frac{ط (ل - ط)}{ط (ل - ط) + ط (ل - ط)}$$

ساوات ہج کی پہلی کہ

$$= (ل - ط) (ط - ص)$$

اسے معلوم ہوتا ہے کہ ماس زاویہ ج ع کا ہی = ی ط

$$ص ع ج = ع ج$$

سیدنا
سیدنا

اسے معلوم ہوا کہ ص ع ج = ع ج یعنی ماس کسی نقطہ پر ہوا اس کا میدان ایک ہی زاویہ پر ہوا

(۱۷۹) دعویٰ مذکور کا ثبوت اس طرح سے ہی ہو سکتا ہے

بموجب دفعہ ۱۷۶ کے $ص ع ج = ی ل$

$$\therefore ص ع ج = ط ی + ی ل$$

$$\text{اور } ع ج = ط ی - ی ل$$

$$\text{اور نیز } ص ع ج = ط + ی ل \text{ اور } ع ج = ط - ی ل \text{ اسے معلوم ہوا کہ}$$

$$\frac{ص ع ج}{ع ج} = \frac{ص ع ج}{ع ج}$$

اسی طرح جگہ (۳۳ ش ۶) ع ج زاویہ ص ع ج کی تفسیر کرتا ہے

(۱۸۰) کسی نقطہ پر ایک خط ماس ہو اور اس پر اس کے عمود نکال جائے تو اس عمود اور ماس

نقطہ تقاطع کا مقام النقطہ دریافت کرو

$$\text{فرض کرو کہ } م ل + م ص + م ط = (۱)$$

ساوات ماس ضلعی کی بموجب دفعہ ۱۷۱ کی ہو تو مساوات عمود کی جو اس پر کھینچی گئی

یہ ہوگی (شکل دفعہ ۱۷۱ کو دیکھو)

$$= (ل - ط) (۲) -$$

اگر ہم فرض کریں کہ مساوات (۱) میں ل و ط کی ایک ہی قیمتیں ہیں اور دونوں مساواتوں

م کو مساوی کریں تو مقام النقطہ مطلوب حاصل ہو جائیگا

ساوات (۱) سے $س - م = لد = ص + ط$ اور

ساوات (۲) سے $س + م = لد = ط ی$

مجذور کر کے جمع کرو تو

$$(س + لد) (س - م) = (ص + ط + ط ی + ط ی)$$

$$= (س + م) (س - م)$$

$$\therefore س + لد = ط ی$$

یہ مساوات مقام النقطہ مطلوب کی ہی اسے معلوم ہوتا ہے کہ مقام النقطہ مطلوب ایک دائرہ ہی ہے جس کا قطر محور اعظم بیضوی کا بنایا گیا ہے ہم نے نقطہ سے عمود نکالا ہے اگر ہم فرض سی ہی عمود نکالتی تو اسی نتیجہ کو حاصل کرتے اسے معلوم ہو کہ $ط$ اور $ص$ عمود $س$ اور $ط$ پر نکالے جائے تو ہر ایک نمونہ $ط$

(۱۸۱) ایک ماس بیضوی کے کسی نقطہ پر اور اس پر عمود ہو سکے سی نکال جائے تو طول اس عمود کا دریافت کرو

ساوات ماس کی کسی نقطہ (لد و س) پر یہ ہے کہ

$$س = ص + لد + ط ی$$

اور محدودین ہو سکے کے ط ی اور بین لیکن اگر $ع$ طول عمود کو جو نقطہ (لد و س) خط $س$ و $لد$ سے

پر نکالیں تبصر کر کے تو

$$ع = (س - م - لد) = (س - م - لد)$$

$$+ م$$

صورت حال میں $لد = ط ی$ اور $س = ص$

$$م = ص - ط ی$$

$$اور س = ص$$

$$\therefore ع = \frac{(ص - ط ی) - (ص - ط ی)}{1 + \frac{ص}{ط ی}} = \frac{ص (ط ی - ط ی)}{ط ی + ص}$$

$$= \frac{ص (ط ی - ط ی)}{ط ی + ص} = \frac{ص (ط ی - ط ی)}{ط ی + ص}$$

$$= \frac{ص (ط ی - ط ی)}{ط ی + ص} = \frac{ص (ط ی - ط ی)}{ط ی + ص}$$

چونکہ $ط ی = س - م$ اسے ہر کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ $ع = \frac{ص (ط ی - ط ی)}{ط ی + ص}$

علیٰ بن القیاس اگر ایک خط (لد و س) کے نقطہ پر ماس ہو اور نقطہ سے

عمود نکالے گی اس سے تبصر ہو تو ہر کو یہ دریافت ہوگا

ع = ع
ع = ع

(۱۸۲) بیضوی کے دو ماس ہر نقطہ بیرونی سے نکل سکتے ہیں

فرض کرو کہ مساوات بیضوی کی یہ ہوگی

$$\text{طا} + \text{ع} + \text{ص} = \text{لا} = \text{طا ص} \quad (۱)$$

اور حوق محدودین نقطہ بیرونی کے ہوں اور لاؤ محدودین کسی نقطہ کے بیضوی پر ہوں اور اس نقطہ پر جو ماس نکال دیا جائے وہ نقطہ (ح اوق) پر گذرے تو مساوات ماس را کی (لاؤ) پر یہ ہوگی کہ

$$\text{طا} + \text{ع} + \text{ص} = \text{لا} = \text{طا ص} \quad (۲)$$

اور چونکہ یہ ماس نقطہ ح اوق پر ہی گذرتا ہی اسلئے

$$\text{طا} + \text{ع} + \text{ص} = \text{لا} = \text{طا ص} \quad (۳)$$

اور چونکہ (لاؤ) بیضوی پر ہی اسلئے

$$\text{طا} + \text{ع} + \text{ص} = \text{لا} = \text{طا ص} \quad (۴)$$

مساوات (۳) و (۴) سے تین لہوؤ کی تین ہوتی ہیں

(۳) سے جو تین نکلیں انکو (۴) میں رکھو تو

$$(\text{طا ص} - \text{ص} = \text{لا}) + \text{ص} = \text{لا} = \text{طا ص}$$

$$\text{یا لا} (\text{طا ق} + \text{ص} = \text{ع}) - \text{طا ص} = \text{لا} + \text{طا} (\text{ص} - \text{ق}) = 0$$

دو تین تین اس مساوات درجہ دوم کی ممکن ہیں اسلئے کہ (ح اوق) کے نقطہ بیرونی ہوں سے

$$\text{طا ق} + \text{ص} = \text{ع} \text{ بڑا بہ نسبت طا ص کے ہے}$$

جو نقطہ ان پر ماس بیضوی کو مس کرتی ہیں ان میں جو خط ملا جائے اسکو وتر تھاس کہتے ہیں

(۱۸۳) ایک نقطہ معلوم سے بیضوی کے ماس کچے گئے ہیں مساوات وتر تھاس کی دریافت کرو

فرض کرو کہ ح اوق نقطہ بیرونی کے محدودین ہوں اور لاؤ اور ماس نقطہ کے محدودین ہیں ایک

ماس بیضوی کو مس کرتا ہی اور لاؤ اور محدودین دوسرے نقطہ کے ہوں جسے دوسرا ماس بیضوی کو

مس کرتا ہی مساوات ماس کی (لاؤ) پر یہ ہے کہ

$$\text{طا} + \text{ع} + \text{ص} = \text{لا} = \text{طا ص} \quad (۱)$$

چونکہ یہ ماس (ح اوق) پر گذرتا ہی تو یہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$\text{طا} + \text{ع} + \text{ص} = \text{لا} = \text{طا ص} \quad (۲)$$

اور علیٰ ہذا القیاس ماس (لام و د) پر نقطہ ح وق پر گذرنا ہی

طاق د + ص ح لام = طاق ص (۳)

اسے بیہ استخراج ہوتا ہے کہ وتر تاس کی یہ مساوات ہی کہ

طاق د + ص ح لام = طاق ص (۴)

مساوات (۴) ظاہر ایک خط مستقیم کی مساوات ہی یہ خط نقطہ لام و د پر ہی گذرنا ہی

اسلئے کہ جب اوسین مختصین لام = لام اور د = د کی لکھیں تو شرط مساوات کی پوری ہوتی ہیں

اور مساوات کی صورت مساوات (۲) کی پیدا ہو جاتی ہی اور علیٰ ہذا القیاس یہ خط نقطہ لام

اور د پر ہی گذرنا ہی اسلئے کہ لام = لام اور د = د کی قیمتوں رکھنی ہی شرط مساوات

پوری ہوتی ہیں اسلئے کہ ان قیمتوں کے رکھنے ہی مساوات کی صورت مساوات (۳) کی سی پیدا ہوتی

اسے معلوم ایک حکمت ماسو کے کہنچے کی معلوم ہوئی کہ اول ایک خط کہجین جو مساوات (۴) کے

تعبیر کرے اور یہ یہ خط جن نقطوں پر بیضوی سی طے اوسین اور نقطہ بیرونی معلوم مین

خطوط وصل کریں تو یہ ماس مطلوب ہونے

(۱۸۴) ایک نقطہ معین سے بیضوی کے وتر کیجے گئے ہیں اور وتر کی اطراف ہی ماس

تو ماسو کے تقاطع کا مقام النقاط ایک خط مستقیم ہوگا

فرض کرو کہ ح وق محدین اوس نقطہ کی میں جسے اوتار کیجے جاتی ہیں اور ان وتروں میں

ایک وتر کے انجا ہونے ماس نکالے گئے ہیں جو نقطہ (لام و د) پر ملتی ہیں۔ ان ماس کے وتر

تاس کی مساوات بموجب دفعہ ۱۸۳ کے یہ ہوگی کہ

لیکن یہ وتر ح وق پر گذرنا ہی اسواسلئے

اسے معلوم ہو کہ نقطہ (لام و د) خط پر واقع ہے

یعنی ماسو کے تقاطع کا مقام النقاط ایک خط مستقیم ہے

اب اس دعویٰ کا عکس ثابت کرتے ہیں

(۱۸۵) اگر ایک خط مستقیم کے کسی نقطہ سے ماس پھینکیں گے کہجے جائیں تو اوتار تاس ایک

مختصین ہی پر گذرنا ہی

(۱) فرض کرو کہ $ل + د + ب + س = ۰$ مساوات ایک خط ستقیم کی ہو اور (ل + د) ایک نقطہ اس خط پر ہو جسے ہم اس بیضوی کے کچے جائیں تو مساوات وتر تماس کے مطابق اسکے بیہ ہوگی

(۲) $ط + د + ص = ل + ل = ط + ص$ چونکہ (ل + د) مساوات (۱) پر ہیں

اس لیے مساوات (۲) اس طرح لکھی جاسکتی ہے کہ

$ص = ل - ل + ط + د = ط + ص$

یا (ط + ل) - ل = ص - ل + ط + د = ط + ص (۳)

اب خواہ کچھ ہی قیمت لے کی ہو یہ خط اس نقطہ پر گزرتا ہے جس کی محوریوں ان مساواتوں سے قیاس ہوئی ہیں

ص = ل - ل + ط + د = ط + ص اور $ط + د + ص = ۰$ یعنی نقطہ جس کے واسطے $ص = ۰$ اور $ل = ۰$ - ل + ط + د = ط + ص

(۱۸۶) طالب علم کو چاہئے کہ وہ اس بات کو خوب سمجھی کہ اس مساوات کے کیا کیا معنی ہیں

دفعہ ۱۰۳ میں جو کچھ دائرہ کی نسبت لکھا گیا ہے وہ بیضوی کی نسبت بھی لکھا جاسکتا ہے

مثالیں

(۱) نسبت خارج المركز اس مساوات بیضوی کے کیا ہے کہ $۲ل + ۳د + س = ۰$

(۲) عرض ستقیم کی طرف ل سے جو تماس بیضوی کا نکلا جائے اس کی مساوات دریافت کرو

(دفعہ ۱۶۲ دیکھو) اور اس تماس کے حصص درمیانی محور کی طول دریافت کرو

(۳) نقطہ ل کی عمود المماس کی مساوات لکھو

(۴) اگر عمود المماس نقطہ ل کا محور اصغر کی طرف ب پر گزری تو تاویضی کی نسبت خارج المركز

(۵) مساواتیں ل + ب اور س + ل کی دریافت کرو (شکل دفعہ ۱۶۲) کی دیکھو اگر یہ خطوط

متوازی ہوں تو نسبت خارج المركز بیضوی کی کیا ہوگی

(۶) ب + د کی مساوات دریافت کرو اور جس نقطہ پر بیضوی کو دوبارہ قطع کریں اس کا

(۷) مساوات ل + ل کی دریافت کرو اور نقطہ ل پر ایک خط تماس ہی اس تماس اور

اوس زاویہ سے

(۸) اگر نقطہ سے جس کا محدود ہے ایک خط نقطہ سے گذرنا ہوا کچا جا تو وہ بیضوی

جس نقطہ پر دوبارہ ملی اوس کا محور دریافت کرو

(۹) بیضوی میں ایک نقطہ ایسا دریافت کرو کہ جسے ماس نکالے گئے محور کے ساتھ یکساں میل کریں

(۱۰) بیضوی میں ایک نقطہ ایسا دریافت کرو کہ جسے درمیان جو ماس ہی محور محدود نہ رہتا

بیضوی کے محور پر ملے ہوں

(۱۱) ع ایک نقطہ بیضوی میں ہے اور اس کا معین تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس لرع د} = - \frac{2}{\text{طی ا}} \text{ض ا}$$

(۱۲) بیضوی پر ع ایک نقطہ ہی اور اس کا معین تو ثابت کرو کہ ماس اوس زاویہ کا جو

درمیان بعد ماس اور ماس نقطہ ع کے بتا ہے

(۱۳) اگر براوس زاویہ کو تغیر کرے جو اوپر کی شال میں بیان ہوا، تو

$$\text{ع س} = \text{ا} (\text{ط ا} - \text{ص ا} \text{ مم بز})$$

(۱۴) بیضوی میں ایک نقطہ ہی اوسے خطوط محور اعظم کی اطراف او و تا تک چکے گئے

اور او و سے عمود لے کر اور اے پر نکالے گئے مین تو ثابت کرو کہ تمام القاطا اونے

نقاط تقاطع کا ایک اور بیضوی ہوگا اور اوسے محور دریافت کرو

(۱۵) ایک ماس بیضوی کا نقطہ ل پر ہی اور اسے معین م ع خارج ہو کر نقطہ ق پر ملتا ہے

تو ثابت کرو کہ ق م = ع ۵ (دفعہ ۱۶۲ کی شکل دیکھو)

(۱۶) ایک ہی محور اعظم پر تسلسل بیضویان بنائیں جائیں تو اون کے عرض مستقیم کی اطراف

ماس کے گئے دو نقاط معین میں سے کسی کسی نقطہ پر گذرینگے

(۱۷) اگر بیضوی کے ماس کے دو قریب بیضویوں کے ماس مین کے اس انجام محور اعظم کے مین

تو یہ قریب بیضویان قائمی زاویوں پر تقاطع کرتے اور ان نقطوں پر نقطہ کرینگے جن کے درمیان

فاصلہ درو چند محور اصغر سے ہو

(۱۸) ثابت کرو کہ طول لنج عمود الماس کا جو بیضوی کے محور اصغر کے کسی نقطہ سے کھینچا جائے اور اس فاصلہ پر مرکز سے ہو اور اس نقطہ اور خط منحنی کے درمیان واقع ہو یہ ہوتا ہی کہ

$$(PA + \frac{PQ}{2})$$

نقاط ہوں

(۱۹) اگر بیضوی کے محور اعظم کی طرف سے ایک نقطہ سے کسی خط موازی کھینچے جائے اور اس فاصلہ پر مرکز سے ہو اور اس نقطہ اور خط منحنی کے درمیان واقع ہو یہ ہوتا ہی کہ

(۲۰) ایک بیضوی کے محور اعظم کے اطراف سے ایک خط منحنی کا جو نقطہ سے نکلا جائے نقطہ پر ملتا ہی اور نقطہ سے ایک عمود لایا جائے لایا گیا ہی اور اس سے ایک عمود لایا جائے لایا گیا ہی اور اس سے ایک عمود لایا جائے لایا گیا ہی

(۲۱) اگر دو بیضوی کے محور اعظم کے اطراف سے ایک خط منحنی کا جو نقطہ سے نکلا جائے نقطہ پر ملتا ہی اور نقطہ سے ایک عمود لایا جائے لایا گیا ہی اور اس سے ایک عمود لایا جائے لایا گیا ہی

(۲۲) ماس جو کسی نقطہ پر ہو اس کی مساوات اس نقطہ کے زاویہ خارج مرکز کی رقموں میں دیا

(۲۳) ثابت کرو کہ مساوات عمود الماس کی کسی نقطہ پر جس کا خارج مرکز زاویہ مساوی ہو یہ ہوتا ہی کہ

$$PA + \frac{PQ}{2} = \frac{PQ}{2} - PA$$

(۲۴) دفعہ ۱۷ کو دیکھ کر ثابت کرو تمام النقاط نقطہ وسط ع کا ایک بیضوی ہوتا ہی کی نسبت خارج مرکز ہے وہ بیضوی معلوم کی نسبت خارج مرکز سے سطح مربوط ہوتی ہے کہ

$$PA + \frac{PQ}{2} = \frac{PQ}{2} - PA$$

(۲۵) خط ہب سے جس نقطہ پر ماس نقطہ کا قطع ہوتا ہی اس نقطہ کو دریافت کرو اور تا وقتیکہ کہ نسبت خارج مرکز کی کیا قیمت ہوگی جب یہ خطوط متوازی ہوں

(۲۶) بیضوی کے نقطہ پر ایک ماس خط منحنی کے کسی نقطہ سے اور اس کے کسی نقطہ سے

تو ثابت کرو کہ تی ایسا بدلتا ہی جب ماس تمام رخ ہوتا ہے گا اور یہ ہی ایسا بدلتا ہے جیسے ماس تمام رخ صہ کا (دفعہ ۱۶۲ کی شکل دیکھو)

(۲۷) اگر خط مستقیم $د م$ لہ $د$ سے بیضوی ط $د$ + $ص$ لہ $د$ = ط اس کو قطع کریں تو ثابت کرو کہ طول وتر کا یہ ہوگا کہ $ط ص = (د + م) (د + م - ص)$

اور یہی تقادیر متقل کے درمیان وہ ربط دریافت کرو جسے یہ خط ماس بیضوی کا ہو جائے (۲۸) محدین نقطہ $د$ کے لہ اور $د$ فرض کر کے $د$ کے قطر جو دائرہ بنایا جائی اور اسکی مساوات

(۲۹) $د$ کے قطر جو دائرہ بنایا جائے اسے ثابت کرو کہ وہ اس دائرہ کو $س$ کر جائی جو محور عظیم کے قطر پر دائرہ کھچا جائے

(۳۰) نقطہ $د$ (وق) سے دو ماس بیضوی کے گئے گئے تو ماس بیضوی جو محور $د$ کو $س$ نکالی جائی

(۳۱) کوئی معین $د$ م بیضوی کا خارج کیا گیا ہی اور محور اعظم کو قطر مقرر کر کے جو دائرہ بنایا گیا ہی اسکو $ق$ پر قطع کرنا ہی اور بیضوی اور دائرہ کے محور الماس نقطہ $د$ اور $ق$ کے نقطہ پر ملے ہیں تو تمام نقطہ رکا دریافت کرو

(۳۲) دو بیضوی متحد الم مرکزین اور انکی محور متحدہ سمت ہیں اور نیز دو بیضیوں میں مجموعہ محور $د$ کے محور بھی ایک ہی ہے تو انکی ماس مشترک کی مساوات دریافت کرو

(۳۳) نقطہ $د$ (وق) سے دو ماس بیضوی نکالی گئی ہیں اور وہ $د$ اور $ر$ کے زاویوں پر محور عظیم ساتھ ملے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$مس ر + مس ر = - \frac{د ق}{د - ق} \text{ اور } مس ر = \frac{د ق}{د - ق}$$

(۳۴) ایک نقطہ کا مقام ان مقامات دریافت کرو جسے ماس ایک بیضوی کے نکالے گئے آپس میں

(۳۵) ثابت کرو کہ دو ماس جو ایک بیضوی کے نقطہ $د$ (وق) سے نکلے جائیں

$$ط (سج) (د - ق) + (د - ق) (ل - سج) ق + (ص - ق) (ل - سج) ق$$

$$یا (ط ق + ص د - ط ل) (ط د + ص ل - ط ل) = (ط ق + ص د - ط ل) (ط ل - ط ل)$$

تو ثابت کرو کہ

(۳۶) نقطہ (ح اوق) سے ماس بیضوی کے کچے گئے ہیں ثابت کرو کہ خطوط جو مبدی سے نقاط

ماس تک کچے گئے ہیں ان کے تعبیر ہوگی $\frac{ل}{ط} + \frac{ق}{ص} = \frac{ل}{ط} + \frac{ق}{ص}$

(۳۷) دائرہ نصف قطر و ک زوج آپس میں زائیدی قائمی بناتی ہوئی مرکز بیضوی کے کچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ اوکے طرفوں سے جو ماس نکالے جائیں اس بیضوی میں قطع ہو گئی

$$\frac{ل}{ط} + \frac{ق}{ص} = \frac{ل}{ط} + \frac{ق}{ص}$$

(۳۸) نقطہ بیرونی ت سے جس کے محد دین ح اوق ہیں ایک خط مرکز بیضوی میں بیضوی کے

نقطہ پر قطع کرتا ہوا کچا گیا ہی تو ثابت کرو کہ

$$\frac{س}{ط} = \frac{ق}{ص} + \frac{ق}{ص}$$

(۳۹) ایک نقطہ بیرونی (ح اوق) سے ماس کچے گئے ہیں اگر لام اور لام محدود نقاط ماس کے تو ثابت

$$\frac{ل}{ط} + \frac{ق}{ص} = \frac{ل}{ط} + \frac{ق}{ص}$$

(۴۰) نقطہ بیرونی (ح اوق) سے ماس بیضوی کے نکالی گئی ہیں اور وہ بیضوی اسی تقاطع اور ق

توقیت ق و . ہ ق کی دریافت کرو کہ ماس کے ہی

(۴۱) نقطہ بیرونی ت سے خطوط ت و اورت ق بیضوی کو ح اوق میں کرتی ہوئی کچے گئے ہیں

اور ست بیضوی کو نقطہ پر قطع کرتا ہی اور رن توازی ہ ت کا محور اعظم سی نقطہ ن پر

مسا ہی تو ثابت کرو ح . ہ ق = ر ن

(۴۲) دو بیضویوں کی نسبت خارج المرکز آپس میں برابر ہیں اور محور انکی توازی ہیں تو ثابت

کہ صرف دو ہی نقطہ ان میں مشترک ہو سکتے ہیں اور یہ بھی ثابت کرو کہ اگر ایسی تین بیضویاں ہوں

اور دو دو ان میں سے تقاطع و ح اوق و ق اور ر اور ر پر تقاطع کریں تو خطوط و ح اور

ق ق اور ر ایک نقطہ پر ملینگے

(۴۳) دو متحد المرکز بیضویاں جن کے محور ایک ہی سمت میں ہیں ایک دوسرے کو تقاطع کرتے ہیں اور دو

چار ماس مشترک کچے گئے ہیں جنسی ایک شکل میں ترکیب یافتہ ہیں اور نقاط تقاطع بیضویوں کے

آپسین اسطرح ملائی گئی ہیں کہ استطیل پیدا ہوا ہی تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب اس معین کو استطیل کے رقبوں کا برابر چاروں محوروں کے نصف حاصل ضرب کے ہی

(۴۴) بیضوی کے کسی نقطہ سے کامعین کیا گیا ہی اور محور اعظم کو قطر مقرر اوپر دائرہ کچا ہی اور اس دائرہ کو وہ معین نقطہ قی پر قطع کرتا ہی تو ثابت کرو کہ ہر ص کے جو عمود اوس ماس پر نکلا کہ جو نقطہ قی سے کچا جای تو وہ برابر ص کے ہوگا

(۴۵) مساوات بیضوی کے لمبا ط اوں محوروں کے دریافت کرو جو محور اصغر کی اطراف سے گذرتی ہیں اور محور اعظم کے ایک طرف پر ملتی ہیں

(۴۶) اگر اس خط متعین $\frac{ط}{ص} + \frac{ص}{ط} = (ط - ص)$ کے نقاط سی ماس بیضوی

$\frac{ط}{ص} + \frac{ص}{ط} = ۱$ کے پیچ جائیں تو وتر ماس عمود الماس بیضوی ہوگا

(۴۷) دفعہ ۱۳۸ میں جس طرح دعوی ثابت کیا ہی اسی طرح دفعہ ۱۸ کے دعوی کو ثابت کرو

نیز دفعہ ۱۳۸ کے دعوی کو اسی طرح ثابت کرو جس طرح دفعہ ۱۸ کی دعوی کو ثابت کیا ہے

(۴۸) مساوات بیضوی کی دریافت کرو مبدی نقطہ (ن وق) بیضوی پر ہے اور محور بیضوی کے محوروں کے متوازی ہیں

(۴۹) بیضوی کے ایک نقطہ سے دو وتر ع اور ع کیجے گئے ہیں اور بیضوی سے قی اور قی کے

ملنے ہیں اگر ح وق محدودین نقطہ سے کے لمبا ط مرکز کے ہوں اور م ل + ن س = مساوات ق ق کی

کی ہو لمبا ط مبدی نقطہ سے کے ہو تو ثابت کرو کہ ع ق اور ع ق

$$\frac{ط}{ص} + \frac{ص}{ط} = \frac{ط}{ص} + \frac{ص}{ط} = (م ل + ن س) = ۰$$

سے تعبیر ہوتے ہیں اور ع مبدی ہے

(۵۰) فرض کرو کہ ع ایک نقطہ بیضوی پر ہے اور ع متوازی محور اکبر کا خط متعین نقطہ

ع پر قطع کرتا ہو کچا گیا ہی اور نقطہ سے دو وتر ع اور ع برابر لائے جو محور اعظم

بناتی ہوئی کیجے گئے ہیں ملاؤ ق ق ق متوازی اوس ماس کا ہوگا جو نقطہ سے نکلا ہوگا

(۵۱) مساوات $م ل + ن س = م ل + ن س$ سے استنباط ماس قرب بیضوی کی مساوات

(۵۲) دفعہ ۵۰ کی شکل میں فرض کرو کہ ع نقطہ ق ق کیلک اسیا خارج کیا گیا ہی کہ

حق = ن ج ع مقام النقطاق کا دریافت کرو

(۵۳) اگر ع آن دائرہ کا معین ہو اور اسکی موافق قطر اب کے طرف آسی لاق کچا جا کر اور ع آن سے نقطہ ق پر سطح ملی کہ لاق = ع ن پس مقام النقطاق کا اور اسکا مقام دریافت کرو

(۵۴) س ع اور نقطہ ع کے عمود المماس کے درمیان زاویہ جو واقع ہو اسکا ماس نقطہ ع کے محدودین کے ارقام میں دریافت کرو

(۵۵) س ع اور عمود المماس نقطہ ع کی درمیان زاویہ کے ماس کے برے سی بڑی قیمت دریافت کرو

(۵۶) ایک بیضی کا محور اکبر و چند محور اصغر سے ہی اور ایک خط طول میں برابر نصف محور اعظم کے اس طرح رکھا گیا ہی کہ ایک سر اور اسکا خط منحنی پر اور دوسرا سر محور اصغر پر تو ثابت کرو کہ نقطہ وسط اس خط کا محور اکبر پر ہوگا

(۵۷) ایک مثلث اس طرح بنایا گیا ہی کہ دو ضلعی اسکی ابعاد سہ کے میں اور تیسرا ضلع محور اکبر بیضی کا ہو اسکی اندر جو دائرہ بنایا جا ہی اسکی مرکز کا مقام النقطاق دریافت کرو

(۵۸) بیضی کے نقطہ ع سی ماس بیضی کا کچا گیا ہی اس پر ص ط اور ہ ط عمود نکالی گئی تو ص ط اور ہ ط پر عمود المماس نقطہ ع پر تقاطع کرینگے

باب دہم

اقطار بیضی کا بیان

(۱۸۷) ایک خط کا طول دریافت کرو جو کسی نقطہ سے سمت معلوم میں بیضی سے ملتا ہو فرض کرو کہ ل د و محدودین اوس نقطہ کے ہیں جسے خط کچا گیا ہی اور ل د اور د اوس نقطہ کے محدودین ہیں جس میں خط کچا گیا ہی اور زاویہ میلان خط کا محور ل د کے ساتھ ہی اور نق طول خط کا

تو بموجب دفعہ ۷ کے $ل د + نق جم بر اور د = د + نق جم ر$ (۱)

اگر ل د اور د بیضی پر ہوں تو یہ قیمتیں اس مساوات میں رکھی جاسکتی ہیں کہ

$$ط د + د + ص ل = ط ل + ص ل$$

$$ط ل (د + ل + ص ج ر) + ص ل (ل د + نق جم ر) = ط ل (ل د + نق جم ر) + ص ل (ط ل + ص ج ر)$$

$$\therefore ل (ط ل + ص ج ر) + ص ل (ل د + نق جم ر) = ط ل (ل د + نق جم ر) + ص ل (ط ل + ص ج ر)$$

باب دہم اس مساوات درجہ دوم کے دو تینوں کے دریافت ہو سکتی ہیں اور یہ طول و خطوں کی تہی جو

(۱۸۷) سے بیضوی تک سمت معلوم میں کچھ جائیں

(۱۸۸) بیضوی میں ایک نظم و اتار متوازیہ معلوم تھی اور سکا قطر دریافت کرو دفعہ ۱۷ کی حد کو کہو

فرض کرو کہ زاویہ میلان و ترون کا محور بیضوی کے ساتھ ہو اور لہذا وہ محدب نقطہ وسط کی

دو ترون میں سے ہوں تو مساوات جسے طول خطوں کے جو (۱۸۷) سے خط منحنی تک پہنچا

بوجب دفعہ ۱۸ کے یہ ہیں کہ

$$b^2 = (a^2 - c^2) \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta$$

چونکہ (۱۸۷) محدب نقطہ وسط و تر کے ہیں تینوں کے جو اس مساوات درجہ دوم سے دریافت ہو سکتے

متحدہ مقدار مختلف سمت ہو سکتے ہیں معلوم ہوا کہ اشغال نق کی فاصلہ تہی چاہی بس

$$b^2 = (a^2 - c^2) \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta \quad (1)$$

جب لا اور کو مقدار متغیر خیال کریں تو یہ مساوات خط مستقیم کی ہی جو ب و میں گذرتا ہی تہی جو مرکز

بیضوی میں گذرتا ہی اسے معلوم ہوا کہ قطر مرکز من گذرتا ہی

اور نیز جو خط مستقیم مرکز من گذرتا ہی وہ قطر ہوتا ہی یعنی تضییف نظم معلوم و اتار متوازیہ کی کرتا

اس واسطے کہ ترکی مناسب قیمت کے مقرر کرنے سے مساوات (۲) ہر خط کو تعبیر کر سکتی ہے

جو مرکز من گذرتا ہی اگر زاویہ میلان محور لا کا قطر کے ساتھ ہو جو تمام و ترون کو جو زاویہ پر

مایل ہیں تضییف کرتا ہی تو ہم کو مساوات (۲) سے یہ حاصل ہوتا ہی

$$b^2 = a^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta$$

$$b^2 = a^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta \quad (3)$$

(۱۸۹) اگر ایک قطر تضییف اون سب و ترون کی کرتا ہی جو متوازی دوسرے قطر کی ہوں

تو دوسرا قطر اون سب و ترون کی تضییف کرے گا جو پہلے قطر کے متوازی ہوں

فرض کرو کہ اور ر م بیضوی کے محور اعظم کے ساتھ میلان دو نو قطروں کے ہیں چونکہ اول

تضییف اون تمام و ترون کی کرتا ہی جو متوازی دوسرے قطر کے ہو تو ہر کو یہ حاصل ہوتا ہی

اور صرف یہی شرط ہی جتنی دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی ہے تب و ترونگو تنصیف کرتا ہی ہے (۱۹۰) جن و ترون کے قطر تنصیف کرتا ہی اوں کا متوازی وہ ماس ہو تا جو قطر کے ایک طرف فرض کرو کہ ح اور ق محدودین قطر کے کسی ایک طرف کے ہیں اور سب تر خلی قطر تنصیف کرتا ہی محو کر ساتھ زاویہ پر مائل ہیں تو قیمتین لا ح اور د = ق اس مساوات کی شرائط کو پورا کر کے

$$ط + جب ر + ص = ل د ح م ر =$$

$$د = مس ر = - - - - -$$

لیکن بموجب دفعہ ۷، اکی مساوات ماس (ح اور ق) کی یہ ہے کہ

$$د - ق = - - - - - ط ح (ل د ح)$$

اسے معلوم ہوا کہ ماس متوازی و ترون کا ہی جنکی تنصیف ہوئی ہے (۱۹۱) محدود قطر ایسی ہوں کہ ہر ایک اونہیں کا سب و ترون کی تنصیف کرتا ہو قطر کے متوازی ہوں تو اوں کو اقطار مزدوج کہتے ہیں دفعہ ۱۹۰ سے ظاہر ہی کہ ہر ایک اقطار مزدوج مین سے متوازی ماس کا ہی وجود ہو کر کسی ایک طرف سے نکلا جائے

(۱۹۲) قطر کے ایک طرف کی محدودین معلوم ہیں تو محدودین قطر مزدوج کے دوسری طرف کی دیا

فرض کرو کہ اس لا اور ب سب ایک بضیوی کی محو ہیں اور س د اور د س ایک زوج اقطار مزدوج کا ہے

فرض کرو کہ ل د و نقطہ ح کے محدودین معلوم ہیں تو مساوات سے ح کی یہ ہے کہ

$$د = \frac{ل د}{ح} \quad (۱)$$

چونکہ قطر مزدوج د د کا متوازی ماس نقطہ ح کا ہی تو مساوات د د کی یہ ہو گی کہ

$$د = - - - - - ح ل د \quad (۲)$$

باب دہم
پس اسے ثابت ہوا کہ دو مزدی نصف قطران کے مربعوں مجموعہ برابر نصف مخروط کے مربعوں
مجموعہ کے ہوا اور سواء ازین

س ۵: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

(۱۹۴) اقطار مزدوج انجمنون پر جو متوازی الاضلاع بیضوی کو مس کرتی ہی اوس کا رقبہ مستقل فرض کرو کر کعبہ سے اور دس اقطار مزدوج ہوں (شکل دفعہ ۱۹۲ کی دیکھو) —

رقبہ متوازی الاضلاع کا جو مضبوطی کو نقاط ع و د پر مس کرتی ہے ایسا کہ اس سے س و جیسے س د یا ہ سے س د اسمین سے سی وہ عمود مرادی جو بیسی اوس ماس پر نکالاجای جو نقطہ سی نکلتا، فرض کرو کہ ل و د محدودین نقطہ کی ہوں تو مساوات ماس کی جو نقطہ سے پرس کرتا ہی یہ ہوگی

پس معلوم ہوا کہ موجب دفعہ (۴۷) کے $E = \frac{\frac{V_1}{\tau_1} + \frac{V_2}{\tau_2}}{\frac{V_1}{\tau_1} + \frac{V_2}{\tau_2} + 1} = \frac{\frac{V_1}{\tau_1} + \frac{V_2}{\tau_2}}{\frac{V_1}{\tau_1} + \frac{V_2}{\tau_2} + \frac{V_3}{\tau_3}}$ اور $D = \frac{\frac{V_1}{\tau_1} + \frac{V_2}{\tau_2}}{\frac{V_1}{\tau_1} + \frac{V_2}{\tau_2} + \frac{V_3}{\tau_3}}$

پس رقبہ ہی تنواری الماضی کا جو بیضوی کی اقطار مزدوج کے انجاموں میں سے کسی ایک ہی برابر اوس قائم الزاویہ کے رقبہ کے جو بیضوی کے محور کے انجاموں میں سے کسی ایک ہے۔
(۱۹۵) فرض کرو کہ ط و ص طول دو اقطار مزدوج کا تعبیر کرتے ہیں اور صہ اون کے درمیان

بموجب دفعہ گذشتہ

$$\frac{ط ص}{ط ص} = \frac{(ط + ص) - (ط - ص)}{(ط + ص) - (ط - ص)} = \frac{ط ص}{ط ص}$$
 جب کہ یہ ثابت کم قیمت جب ہوگی کہ $ط = ص$ پس
 اسے معلوم ہوا کہ جب $ط = ص$

(۱۹۴) دفعہ ۱۹۴۴ سی حکومت حاصل ہو گیا کہ

$$\text{لا} = \text{لا حم} + \text{لا حم ب}$$

$$\text{ر} = \text{لا حم} + \text{ر ج ب}$$

ان قیمتوں کو مساوات میں

$$\text{تو } \text{لا} (\text{لا حم} + \text{ر ج ب}) + \text{ص} (\text{لا حم} + \text{ر ج ب}) = \text{ط} (\text{ض} + \text{من} + \text{بم})$$

$$\text{یا لا} (\text{ط} + \text{ج ب} + \text{ص} + \text{حم}) + \text{ر} (\text{ط} + \text{ج ب} + \text{ص} + \text{حم}) = \text{ط} (\text{ض} + \text{من} + \text{بم})$$

$$+ \text{لا} (\text{ر} + \text{ط} + \text{ج ب} + \text{ص} + \text{حم}) + \text{ص} (\text{لا} + \text{ر} + \text{ط} + \text{ج ب} + \text{ص} + \text{حم}) = \text{ط} (\text{ض} + \text{من} + \text{بم})$$

لیکن چونکہ س د اور س د نصف قطر مزدوج میں

$$\text{مس} = \text{مس ب} = \text{ص}$$

اسے معلوم ہوا کہ انشال آرڈو ہوتی ہیں اور مساوات یہ ہوتی ہے کہ

$$\text{لا} (\text{ط} + \text{ج ب} + \text{ص} + \text{حم}) + \text{ر} (\text{ط} + \text{ج ب} + \text{ص} + \text{حم}) = \text{ط} (\text{ض} + \text{من} + \text{بم})$$

اس مساوات میں فرض کرو کہ لا = تو

$$\text{ر} = \text{ط} + \text{ج ب} + \text{ص}$$

بقیمت س د کی ہی جو ص سے تعبیر ہوگا اور علیٰ ہذا التقیاس س د کو ط نعیہ کرنا پس

$$\text{ط} = \text{ط} + \text{ج ب} + \text{ص}$$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات مضبوطی کی لحاظ افکار مزدوج کے یہ ہے

$$1 = \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \frac{\text{لا}}{\text{ط}}$$

یا متبادر متغیر کے زبردن کے ساتھ کرنے سے

$$1 = \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \frac{\text{لا}}{\text{ط}}$$

(۱۹۹) ایک خاص صورت دفعہ گذشتہ کی یہ ہے کہ لا = ص تو

$$\text{ط} + \text{ج ب} + \text{ص} + \text{حم} = \text{ط} + \text{ج ب} + \text{ص} + \text{حم} + \text{ص}$$

$$\therefore \text{ط} (\text{ج ب} + \text{ب} - \text{ج ب} - \text{ص}) = \text{ص} (\text{حم} + \text{حم} - \text{ج ب} - \text{ب})$$

$$= \text{ص} (\text{ج ب} + \text{ب} - \text{ج ب} - \text{ص})$$

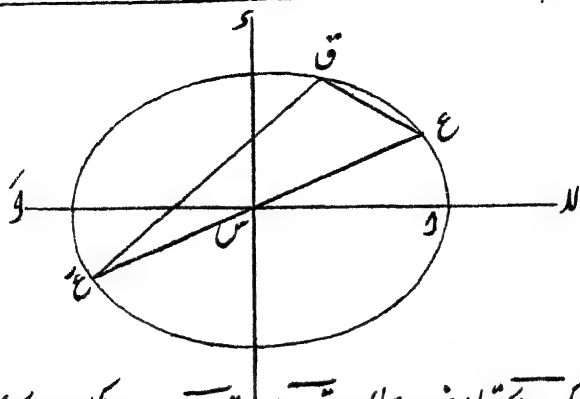
$$\therefore (\text{ط} - \text{ص}) (\text{ج ب} - \text{ب} - \text{ج ب} - \text{ص}) = 0$$

$$\therefore \text{ج ب} = \text{ب}$$

$$\therefore \text{ب} = \text{ک} - \text{ص}$$

اور چونکہ ط = ص اور ر ک ب اور بین = ط ص موجب دفعہ ۱۹۳ کے

اسے معلوم ہوا کہ قیمت ط کی دفعہ گذشتہ میں یہ ہوگی کہ



فرض کرو کہ ع ق قطر بیضوی کا اور ق ع اور ق س دو اوتار مکمل اور لا دو محدودین نقطہ ع
اور بیوی - لا اور - دو محدودین نقطہ ع کے ہوئی
تو مساوات ع ق کی بموجب دفعہ ۳ کے
(۱) $س - ع = م (لا - لا)$
اور مساوات ع ن کی

(۲) $س + ع = م (لا + لا)$
محدودین نقطہ ق کے مساوات (۱) اور (۲) کی شرائط کو پورا کرتی ہیں پس اگر لا اور اول
محدودین کو تعبیر کریں تو ہم کو (۱) اور (۲) کے ضرب دینے سے یہ حاصل ہوتا ہے
(۳) $س - ع = م م (لا - لا)$
لیکن اس سے کہ (لا و) اور (لا و) نقاط بیضوی پر ہیں

$$\begin{aligned} ط - ع + ص لا &= ط ص \\ ط - ع + ص لا &= ط ص \\ \therefore ط (ع - ع) + ص (لا - لا) &= 0 \\ \therefore ط - ع = - \frac{ص (لا - لا)}{ط} \end{aligned}$$

(۴) اور (۳) سے ہکو یہ حاصل ہوتا ہے

(۵) $م م = - \frac{ص (لا - لا)}{ط}$
لیکن ہم دفعہ ۱۸۸ میں ثابت کر چکے ہیں کہ اگر (۵) کی شرائط پوری ہوں تو ان دو خطوط کے بتائی مساوات
یہ ہیں کہ $س = م لا اور ع = م لا$ اظہار خروج سے تعبیر ہونگی پس اسے دعوی ہمارا ثابت ہے
مساوات قطبیہ
(۲۰۴) مساوات قطبیہ بیضوی کی دریافت کرو یہ ہر ایک قطب ہے

فرض کرو کہ $ص ع = ی$ اور $ا ص ع = ر$ (شکل دفعہ ۱۵۸ کی دیکھو)

تو $ص ع = ی$ اور $ن$ موجب حد کے

یعنی $ص ع = ی (ط ص + ص م)$

یا $نق = ط (ا - ی) + ی نق جم (ک - ر)$ دفعہ ۱۶۱ کے

یا $نق (ا + ی جم ر) = ط (ا - ی)$

اور $نق = \frac{ط (ا - ی)}{ا + ی جم ر}$

اب اگر زاویہ $ا ص ع$ کو ر سے تعبیر کریں تو یہ کو $ی$ حاصل ہوگا جو پہلے حاصل ہوا تھا کہ

$ص ع = ی (ط ص + ص م)$

پس $نق = ط (ا - ی) + ی نق جم ر$

اور $نق = \frac{ط (ا - ی)}{ا - ی جم ر}$

(۲۰۵) دفعہ گذشتہ کو اس کلام میں لگاتے ہیں کہ اسے اول مساوات وتر کی دریافت کرنی ہے

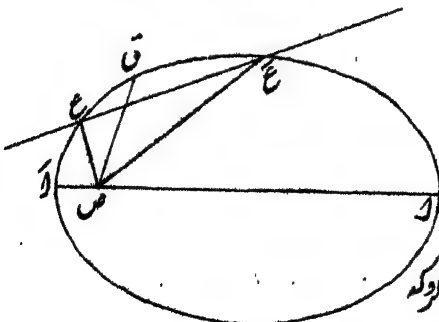
پہر اسے قطبی مساوات ماس کی دریافت کریں گی

فرض کرو کہ $ع اور ع$ دو نقطی بضوی پر ہیں اور

$ا ص ع = ہ$ اور $ا ص ع = ہ + ہ$

پس $ص ع = ر$ اور فرض کرو کہ $ل$ نصف عرض مستقیم بضوی کا ہی پس

$ل = ط (ا - ی)$ اب یہ مطلوب ہے کہ مساوات قطبی $ع$ کی دریافت کریں



دفعہ ۲۹ کو دیکھ کر یہ مساوات فرض کرو کہ

(۱) $ا ی جم ر + ب ی جم ر + س =$

چونکہ خط نقطہ $ع$ پر گذرنا ہی اسلئے مساوات (۱) کی نقطہ سے شرائط پوری ہونی چاہئے

$ا ص ع = ہ - ب$ اور $ا ص ع$

ص ع = $\frac{ل}{ا + ی جم (ھ - ب)}$ پس مساوات (۱) سے

ل [ا جم (ھ - ب) + ا ب جب (ھ - ب)]
 ۲) . = [ا + ی جم (ھ + ب)]
 اور علیٰ ہذا القیاس خط نقطہ ع پر بھی گذرنا ہی

ل [ا جم (ھ + ب) + ب جب (ھ + ب)]
 (۳) . = [ا + ی جم (ھ + ب)]
 (۲) اور (۳) کی تفریق کرنے سے

ل (ا جب ھ ص ص - ب جم ھ ص ب) + س ی جب ھ ص ص = .

∴ ل (ا جب ھ ص - ب جم ھ ص) + س ی جب ھ ص = . (۴)

اور مساوات (۲) اور (۳) کے جمع کرنے سے

ل (ا جم ھ ص ب + ب جم ھ ص ب) + س (ا + ی جم ھ ص ب) = .

∴ ل (ا جم ھ ص + ب جب ھ ص) + س (قط ب + ی جم ھ ص) = . (۵)

(۴) اور (۵) سے ہلکوبہ معلوم ہوتا ہے کہ

ل + س (قط ب جم ھ ص + ی) = .

ل ب + س قط ب خب ھ ص = .

۱) اور ب کی قیمتیں (۱) میں رکھو اور س پر تقسیم کرو تو ہلکوبہ حاصل ہوگا

س [قط ب جم ھ ص + ی] جم ر + قط ب جب ھ ص ب ر - ل = .

∴ س = $\frac{ل}{ی جم ر + قط ب جم (ھ - ر)}$

اگر ص ق زاویہ ع ص ع کی تضعیف کرے تو ہلکوبہ حاصل ہوگا

ع ص ق = ب اور ل ص ص = ھ ص

اب فرض کرو کہ ب غیر متغیر کم ہو تو ور ع ماس نقطہ ق پر ہو جائیگا اور ہم اس کی مساوات قطبیہ

ب = . فرض کر کے نتیجہ بالاسے حاصل کر سکتے ہیں

ق = $\frac{ل}{ی جم ر + جم (ھ - ر)}$

اور ی = ا کے فرض کرنے سے تحقیقات اس دفعہ کی قریب البیضوی سے متعلق ہو جائیگی

(۲۶) مساوات قطبیہ بیضوی کی الجاظ کر کے فائدہ مند ہوتی ہے اور وہ مساوات طرک + ص ل = ط ص

ساوات قطبیہ کے

۱۵۶

باب دہم سے مستنبط ہو سکتی ہے اس طرح کہ جو را اور قی جب رجائی لا اور کے رکبین تو ہلویہ خاصہ ہوگا

$$بی (طاجبر + صج ر) = طاص$$

اب بیضوی کے باب خیر لطف دعوی ثابت کرتے ہیں

(۲۷) بیضوی کے وتر ہسکہ کے اطراف کے ماس نکالے جائیں (۱) تو وہ ماس خط منظم تقاطع

(۲) ماسوں کے تقاطع سے خط ماسکہ میں ملا گیا عمود وتر ماسکہ پر ہوگا
اول اگر دو ماس بیضوی کے نقطہ (ج اور ق) پر ملتے ہیں تو مساوات وتر ماس کی موجب

$$\text{دفعہ ۱۸ کے یہ ہوگی کہ } طاق + صج ر = لا = طاص$$

فرض کرو کہ وتر ماسکہ پر گزرتا ہی جس کے محدودین لا = طای اور ر = ۰ تو

$$صج ر = طای = طاص$$

یعنی نقطہ تقاطع ماسوں کا اس خط منظم پر ہے جو طاق اس ماسکہ کے مقرر کیا جای
دوم مساوات خط کی جو ماسکہ اور نقطہ (ج وق) میں گزرتا ہی ہے

$$ر = ط + صج ر = ط + لا = طای$$

اگر ر = ط تو اس مساوات کو صورت یہ ہوگی کہ

$$ر = ط - ط = صج قی$$

اسو طے خط عمود وتر ہسکہ کے رے جسکی مساوات یہ ہے کہ

$$ر = ط - ط = صج قی$$

(۲۸) بیضوی کے اندر یا باہر ایک نقطہ موار او سے دو خط استواری دو خط مستقیم معلوم کے مضامین کا
ملنے ہوئی نکالے جائیں تو ان کے حصوں کی سطحوں میں نسبت متقل ہوگی یعنی کچھ تغیر اور میں

فرض کرو کہ (لا و ر) نقطہ معلوم ہی اور خط مستقیم معلوم محور اعظم کے ساتھ حصہ اور ب زاویوں کے

میل کرتے ہیں موجب دفعہ ۱۸ کے اگر ایک خط (لا و ر) سے اچھا جائے اور خط منحنی کے ملے اور
زاویہ ہر محور اعظم کے ساتھ ملے ہو تو اس مساوات سی او سکی حصوں کے طول معلوم ہوتے ہیں

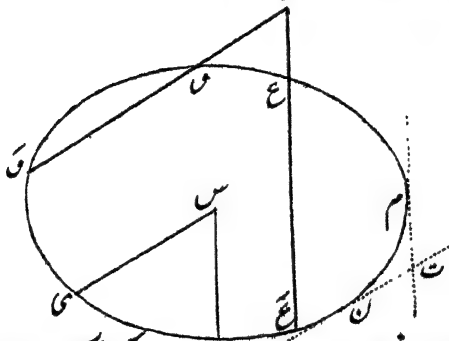
$$\text{قی (طاجک حصہ + صج کم حصہ) + مری (طاجک حصہ + صج کم حصہ) = طاص کم حصہ}$$

باب دوم کے سطح حصوں کی = $\frac{\text{ط} + \text{ج} + \text{ص} + \text{ح} + \text{ط}}{\text{ط} + \text{ج} + \text{ص} + \text{ح} + \text{ط}}$

اور علیٰ ہذا القیاس اوس خط کے حصوں کی سطح جو (لاؤں) اسے زاویہ ب بنائیں اور کچا جا

= $\frac{\text{ط} + \text{ج} + \text{ص} + \text{ح} + \text{ط}}{\text{ط} + \text{ج} + \text{ص} + \text{ح} + \text{ط}}$

اور یہ نسبت مستقل ہی خواہ لا اور تو کچھ ہی ہوں



فرض کرو کہ ط وہ نقطہ جس کی خطوط ط ع اور ط ق ق کیے گئے ہیں اور محور اعظم پر زاویہ ا اور

ب بناتے ہیں تو ط ع . ط ع = $\frac{\text{ط} + \text{ج} + \text{ص} + \text{ح} + \text{ط}}{\text{ط} + \text{ج} + \text{ص} + \text{ح} + \text{ط}}$

نصف قطر س د اور س ی توازی ع ع اور ق ق کے نکالو تو بموجب دفعہ ۴۰ کے

$\frac{\text{س د}}{\text{س ی}} = \frac{\text{ط ع}}{\text{ط ق}}$ $\frac{\text{ط ع}}{\text{ط ق}} = \frac{\text{ط} + \text{ج} + \text{ص} + \text{ح} + \text{ط}}{\text{ط} + \text{ج} + \text{ص} + \text{ح} + \text{ط}}$

فرض کرو کہ ت م اور ت ن مماس توازی ع ع اور ق ق کے ہوں تو اگر ط منطبق ت پر ہو تو

سطح ط ق اور ط ق کی ت ی ہو جائیگی $\frac{\text{ت م}}{\text{ت ن}} = \frac{\text{ط ق}}{\text{ط ق}}$ $\frac{\text{ت م}}{\text{ت ن}} = \frac{\text{ط ق}}{\text{ط ق}}$

مثالین

(۱) س ع اور س نصف قطر مزدوج ہیں اور نقطہ ع کے محدودین (لکڑی) معلوم ہیں مساوات

خط ع د کی دریافت کرو

(۲) بیضوی کے کسی نقطہ سے خطوط کسی قطر کے اطراف میں ملائے گئے قطر مزدوج سے نقطہ

اور ن پر ملین تو ثابت کرو کہ س م . س ن = س د

(۳) س ع اور س نصف قطر مزدوج ہیں اور س ع اور س د دو قطر مزدوج ہیں تو ثابت کرو کہ

رقبہ مثلث س ع کا برابر رقبہ مثلث د س د کے ہے

(۴) مزدوج نصف قطروں کے اطراف ع اور د سی عمود الماس کے گئے نقطہ ک پڑتے ہیں تو

مساوات ک س کی دریافت کرو اور ثابت کرو کہ ک س عمود ع د پر ہے

(۵) مرکز بیضوی سے عمود ماس پر نکالا گیا ہی تو سطح اس عمود اور مطابق اسکے اس عمود الماس

جو درمیان محورون کے واقع ہو برابر ہو تا ہی نصف محورون کے مربعوں کے تفاوت کی

(۶) مرکز بیضوی سے عمود جو اسکے ماس پر نکالا جائی تو نقطہ تقاطع کا مقام انقطاع خط منحنی

جس کے مساوات یہ ہے $ق = ط + ص$ جب ر مرکز مبدی

(۷) بیضوی کی راس سے خط ارق کا ق کے نقطہ وسط سے گزرتا ہی اور ص ع نقطہ پر

تو ثابت کرو کہ مقام النقطہ ر کا بیضوی ا اور ق کا مقام النقطہ ہی بیضوی ا

(۸) مرکز بیضوی ا اور محور اعظم مقام ابتدای ہی مساوات قطبیہ بیضوی کی دریافت کرو

(۹) اگر کوئی وتر ا ق محور اعظم مدودہ سے نقطہ ر پر ملے اور س ع نصف قطر متوازی ا ق کا

تو $ا ق = ا ر = ا س ع$

(۱۰) بیضوی کے محور اعظم ا ل کو قطر قرار دیکر ایک دائرہ بنایا ہی اور دائرہ میں ایک نقطہ

اور ل ع اور ل ع ط ای گئی بیضوی کو ق اور ق پر تقاطع کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ

$\frac{ل ع}{ا ق} + \frac{ل ع}{ا ق} = \frac{ل ع}{ا ق} + \frac{ط ع}{ا ق}$

(۱۱) اگر بیضوی د نصف قطر مزدوج قطر مقرر ہو کر دائرے ا و ن پر جائیں تو ان کی تقاطع کا م

دہ خط منحنی ہو گا جس کی مساوات یہ ہے

$ا (ل ع + ل ع) = ط ل ل ع + ص ل ل ع$

(۱۲) س ع اور س نصف قطر مزدوج ہیں اور س ق عمود س د پر مقام النقطہ کا دیکر

(۱۳) وہ نقطہ دریافت کرو جہاں بیضوی ط (۱-ی) = تق + قی می جمع رخا

ط (۱-ی) = بی جبر + بی (۱+ی) جم رکھ کر قطع کرتی ہے

(۱۴) عرض مستقیم کے انجا موں کے جو چار ماس نکالے جائیں اونکی مساواتین قطبیہ دریافت کرو اور محور

خورد کے انجا موں کے جو ماس نکالے جائیں اونکی مساواتین ہی دریافت کرو اور اسکے قطب ہے

(۱۵) ع اور ق دو نقطے ایسی لے گئے ہیں کہ مجموعہ زاویوں ارض ع اور ارض ق کا مستقل ہے

تو جو ماس ان نقطوں کے نکالے جائیں اونکے نقطہ تقاطع کا مقام انقاط دریافت کرو

(۱۶) اگر ع صر ع و ترا اسکے بیضوی ہو اور خط صر ع سے ایک خط ص ق متوسط النسبت صر ع

صر ع کا جدا کیا جاوے تو مقام انقاط ق کا بیضوی ہوگا جسکی نسبت خارج المکز وہی ہوگی جو بیضوی

(۱۷) دو بیضوی مشترک الماس کہ ہیں اور اونکی محاورا عظم ہیں ایسی ہیں اور متحد المست ہیں تو

اونکی نقاط تقاطع کے محدودین قطبیہ دریافت کرو

(۱۸) ایک بیضوی کے دو ماس نقطہ بیرونی کسی کہے گئے ہیں ایک ماس کے طول کی نسبت دو

ماس کے طول سے بناؤ کن حدود دھائی کے درمیان واقع ہی

(۱۹) ت ع اور ت ق ماس بیضوی کے ہیں اور ان ماسوں کے متوازی مرکز سے نصف قطر

س ع اور س ق کہے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ ع ق اور ع ق متوازی ہیں

(۲۰) بیضوی اور دائرے آپس میں چار نقطوں پر تقاطع کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ اوں میں مشترک

مساوی زاویے محاورا عظم پر پڑتے ہیں

(۲۱) جب زاویہ درمیانی نصف قطر دائرہ جو ماس کے کچا جاوے اور ماس کی نہایت کم ہو تو

قطر دائرہ = ط

(۲۲) جو زاویہ درمیانی نصف قطر دائرہ جو مرکز سے کچا جاوے اور ماس نہایت کم ہو تو نصف قطر دائرہ

$$= \left(\frac{ط + ص}{۲} \right)$$

(۲۳) ایک بیضوی کے قطر ع کی اطراف سے ع ت اور ع ت ماس نکالی گئی ہیں اور کوئی

اور قطر ع سے نقطہ ت پر ملتا ہی اور اس کا مزدوج ع ت سے نقطہ ت پر ملتا ہی اور

ایک اور ماس ہی ع ت سے ت پر ملتا ہے تو ثابت کرو کہ

ع ت : ع ت :: ع ت : ع ت

باب دوم
(۲۴) بیضوی کے اقطار مزدوج کی انجائون $14n$ اور سے خطوط متوازی کی ہی ماس کے گئے ہیں اور مرکز سے کوئی خط ان خطوں کو اور ماس کو کاٹتا ہو الفاطح و دت کچا گیا ہے تو یہ ثابت کرو

$$س ع + س د = س ت$$

(۲۵) بیضوی کے مختلف نقاط سے ماس نکالے گئے ہیں اور ان کی طول برابر ہیں اور س کے نصف قطر مزدوج کے جوہر نقطہ سے کچا جائی تو اون ماسوں کے اطراف سے مقام النقاط جو نیگا دہ متحدہ مرکز بیضوی ہوگی اور نصف محور اوس کے بیڑائی

$$14n$$
 اور $14n$ اور $14n$

(۲۶) دفعہ ۱۱ امین جو مساوات ماس کی لکھی ہے اوسے اقطار مزدوج کی اطراف سے جو ماس کاٹا جائے اور ان کی تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

(۲۷) بیضوی میں اگر ایک نقطہ (لہ و تہ) سے وتر متوازی ایک خط قائم کا نکال جا تو ثابت کرو کہ طول اس وتر کا ایسا برابر ہے جیسا کہ $س$ (ہے) $س$ امین سے زاویہ میلان ماس (لہ و تہ) کا محور کے ساتھ ہے اور وہ زاویہ میلان خط قائم اور محور کا ہی

(۲۸) اگر بیضوی کے نقطہ سے دو وتر ع ق اور ع ر متوازی دو قائم خطوں کے کچے جائیں اور نقطہ ع سے جو ماس نکال جا اوسکی ساتھ وہ زاویہ اور ب بنائیں تو ثابت کرو کہ ع ق ہمہ اور ع ر ق ب مستقل ہیں

(۲۹) ایک بیضوی معلوم المقدار کے عرض مستقیم کے اطراف پر ایک قریب بیضوی بیضوی کو عرض مستقیم قریب بیضوی کا دریافت کرو

(۳۰) بیضوی کے اقطار متقاطع علی القوام کے اطراف میں جو خط ملا یا جا اوسے جو محور مرکز سے نکالے وہ مستقل ہوتا ہے یعنی ہمیشہ ایک ہی مقدار اوسکی ہوتی ہے

(۳۱) محور بیضوی کے انجام سے اوتار کچے گئے ہیں تو ان کی نقاط وسط کا مقام النقاط دریافت کرو

(۳۲) کسی نقطہ معین سے اوتار بیضوی کچے گئے ہیں تو ان کے نقاط وسط کا مقام النقاط دریافت کرو

باب دہم ایک بیضوی کے دو وتر ماسک متقاطع علی القوام کیجئے گئے ہیں تو ان کا تمام اوسط حالت میں درج کرو

کہ اوکلی سطح کم از کم یا زیادہ از زیادہ

(۳۳) بیضوی میں اگر ع و ا ورق ق وتر ماسک متقاطع علی القوام ہوں تو

$$\frac{ص ع}{ص ا} + \frac{ص ق}{ص ب} = \frac{ص ب}{ص ا} + \frac{ص ق}{ص ب}$$

(۳۵) ع ص ع اور ق ق اوتار ماسک میں اورت وہ نقطہ ہی جہاں ع ق اور ع ق ق ٹوٹتا ہے

تق ص اوتار ماسک کے ساتھ یکساں میل رکھتا ہے اورت ماسک ص کے خط قسٹم ہے

(۳۶) اگر نقطہ ع کے راور ق قطبی محمدین ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ص ع}{ص ا} = \frac{ص ق}{ص ب} \text{ او } \frac{ص ع}{ص ا} = \frac{ص ق}{ص ب}$$

(۳۷) بیضوی میں دو اقطار مزدوج کی اطراف ع اور عی عمود قطر بن جائیگی میں اور قطر ہے

ر = لاس ہر ثوابت کرو کہ عمود کے مربعوں کا مجموعہ ط ا ح ہ + ص ا ح ہ ہے

(۳۸) نقاط ع اور ق کے خارج المکرکز اوی س اور س میں ثوابت کرو کہ قطرون اطراف

جو ماس نکالے جائیں اور اوی سے متوازی الاضلاع پیدا ہوا ہو اس کا رقبہ یہ ہے (س - س) ط ص

اور یہ یہی ثابت کرو کہ یہ رقبہ جب نہایت کم ہوگا کہ ع اور ق اطراف قطر مزدوج کے ہوں

(۳۹) ثوابت کرو کہ بیضوی میں جن وترون کا طول ر س ہو ان کے نقاط وسط کا مقام تقاطع ہوگا

س ط ا ب + ص ا ل ل + ص ب ل ل = ص ا ل ل + ص ب ل ل

(۴۰) نقطہ ط کے محمدین (ح و ق) ہیں اور اوی سے وتر بیضوی کے ایک دوسرے کے ساتھ

قائے زاویے بناتے ہوئے کیجئے گئے ہیں اگر س ع اور س ق نصف قطر مرکز سے متوازی وترو

کھینچیں اور ق وترون کے نقاط وسط ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ط ب}{س ب} + \frac{ط ق}{س ق} = \frac{ط ا}{س ا} + \frac{ط ب}{س ب}$$

(۴۱) نقطہ ع کے محمدین معلوم ہیں نقاط ع اور د سے جو ماس نکالے جائیں ان کے تقاطع

محمدین دریافت کرو

$$(۴۳) \text{ ثبات کرو کہ مساوات } \left[\frac{(ص - ل - ط - ر)}{ط ص} + \frac{(ل - ص - ط - ر)}{ط ص} \right] = 1 - \frac{ر}{ص} + \frac{ل}{ط}$$

تعبیر اوں ماسوں کو کرتی ہے کہ ع اور د سے نکالے جائیں لہ اور ر نقطہ ع کے محدودین میں (شکل دفعہ ۱۹۲ کی دیکھو)

(۴۳) اگر ع اور س بیضوی د و ب د کے اقطار مزدوج ہوں اور ب ع اور ب د ملای جائیں

اور ل و اور د و بھی اور یہ نقطہ ط پر ملین تو ثبات کرو کہ ب د ط ع متوازی الاضلاع ہے

(۴۴) ثبات کرو کہ رقبہ متوازی الاضلاع کا جسکا ذکر اوپر ہوا ہے = ط + ص - ل - ط حصہ میں ل و د

محدودین نقطہ ع کے ہیں اور اس رقبہ کی بڑی سی بڑی قیمت دریافت کرو

(۴۵) اگر ایک خط بیضوی کی ہمسکہ سی کھینچا جاوے اور زاویہ ماس کے ساتھ بنا ہی تو ثبات کرو کہ او

اور ماس کے نقطہ تقاطع کا مقام انقاط ایک لہ ہوگا جو بیضوی کو مس کرے گا بش طیکہ کم حصہ بیضوی کے نسبت خارج المرکز سی سے کم ہو اور بالکل باہر واقع ہوگا اگر کم حصہ اوس نسبت سی بڑی ہو

(۴۶) بیضوی میں اقطار کے زوج مزدوج پر ص ق اور د ق عمود نکالے گئی ہیں جو نقطہ ق پر تقاطع

کرتے ہیں تو ثبات کرو کہ ق کا مقام انقاط متحد المرکز بیضوی ہے

(۴۷) دو بیضوی میں جبکہ ہمسکہ منطبق ہیں اور ایک کا ماس دوسرے کے ماس سے قائمون پر تقاطع کرتا ہی

ثبات کرو کہ نقطہ تقاطع کا مقام انقاط دائرہ ہی جسکا مرکز بیضوی کا مرکز ہی

(۴۸) جب محور محرف ہوں تو ثبات مساوات ل + ر = ص - ل کیا تعبیر ہوتا ہی

(۴۹) جب اقطار کے زوج مزدوج محور ہو اور ان کے لحاظ سے بیضوی پر بحث کجای تو ثبات کرو کہ

$$\text{مساواتین } ر = م \text{ لہ اور } ر = م \text{ لہ اقطار مزدوج کو تعبیر کر نیکی بش طیکہ م} = - \frac{ص}{ط}$$

(۵۰) بیضوی کے مساوات میں اقطار مزدوج محور مقرر کی گئی ہیں اور وہ آپس میں برابر ہیں تو

نقطہ کے عمود ماس مساوات دریافت کرو

(۵۱) کسی نقطہ ع سے ع م اور ع ن اقطار مزدوج مساویہ پر عمود نکالیں تو ثبات کرو کہ

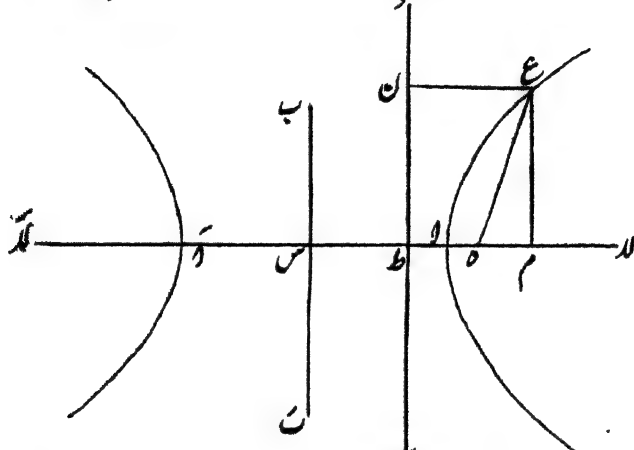
عمود الماس من کی تصنیف کرتا ہے

باب یازدهم

بعد الغضب

(۲۰۹) مساوات بعید البیضوی کی دریافت کرو

بعید البیضوی مقام انقطاع اوس نقطہ کا ہوتا ہے جو سطح حرکت کرتا ہی کہ نقطہ معین اور خط معین کے
اوسکے ابا و میں نسبت مستقل ہوتی ہے اور یہ نسبت ایک سی ٹری ہوتی ہے



فرض کرو کہ نقطہ معین اور دو ایک خط معین ہے، ہر عمودی کو پر نکالو اور ط کو مبداء مانو اور ط کو سمت محور لے کی اور ط کو محور کے جانو

اور ع ایک نقطہ مقام التقاطیر فرض کرو اور ح و ط اور ع م متوازی طاء کا اور ع ن متوازی
طاء کا نکالو اور طہ و ع اور ی نسبت ح و ع اور ع ن کی مقرر کرو اور لہ اور ی محدین نقطہ ع
نقو موجب حدود کے

$$\overline{m} \cdot \overline{c} = \overline{mc}$$

$$P_{\text{ع}} \cdot P_{\text{ی}} = P_{\text{ع ی}}$$

$$F_{\text{net}} = F_0 + F_c =$$

يعني لا + (لا - ع) = لا ع

یعنی لا + (لا نزع) = لا لا
یہہ مساوات بعد البیضوی کی موافق مبداء اور محور مفروضہ کے

باب یازدہم کروکھور لست کہاں لعید البیضوی طے ہین
(۲۱۰) دریافت کروکھور لست کہاں لعید البیضوی طے ہین
لکھو تواسوات لعید البیضوی کی یہ ہوگی کہ

$$(لا - ع) = ی لا$$

$$لا - ع = ی لا$$

$$لا = ی لا$$

$$لا = ی لا$$

$$لا = ی لا$$

چونکہ ی بڑی ہے اسلئے ا۔ ی مقدار بھی ہوگی
فرض کرو کہ ط لا = ع اور ط لا = ع پہلا خط ط کی بائیں طرف اندازہ کیا گیا ہی
اسے معلوم ہوا کہ آ اور آ بعید البیضوی کے نقطے ہین۔ آ اور آ راس بعید البیضوی اور ان راسوں
کے درمیان کا نقطہ وسط اس مرکز بعید البیضوی کہلاتا ہی
(۲۱۱) ہم مساوات بعد البیضوی کو بہت سادہ بنا سکتے ہین اگر مبدی کو ابر یا س پر بدل دیں
اول مبدی کو مقرر کرو

$$چونکہ ط لا = ع اور ط لا = ع پہلا خط ط کی بائیں طرف اندازہ کیا گیا ہی
اسے معلوم ہوا کہ آ اور آ بعید البیضوی کے نقطے ہین۔ آ اور آ راس بعید البیضوی اور ان راسوں
کے درمیان کا نقطہ وسط اس مرکز بعید البیضوی کہلاتا ہی
(۲۱۱) ہم مساوات بعد البیضوی کو بہت سادہ بنا سکتے ہین اگر مبدی کو ابر یا س پر بدل دیں
اول مبدی کو مقرر کرو$$

$$تو ر + (لا - ع) = ی لا$$

$$یعنی ر + (لا - ع) = ی لا$$

$$لا + لا = لا - ع + ع$$

$$لا = لا - ع + ع$$

$$(1 - ی) = \left[لا + \frac{ع}{1 - ی} \right]$$

$$بعد لا = ع اور ط لا = ع پہلا خط ط کی بائیں طرف اندازہ کیا گیا ہی$$

اسکو رط سے تعبیر کرو تواسوات کی شکل ہو جاگی

$$ر = (1 - ی) (رط لا + لا)$$

اگر اس بات کو یاد رکھیں کہ مبدی راس ہی تو ہم زیر کو آرا سکتے ہین اور اسوات کو اس طرح لکھیں
ر = (1 - ی) (رط لا + لا) (۱)

وہ صم نقطہ سے پر سب کو مقرر کرو

چونکہ س ۱ = ط اور لہ = لہ سہ ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں رکھو تو

$$۲ = (۱ - ی) (۱ - ط) + (لہ - ط) (۱ - ط)$$

$$= (۱ - ی) (۱ - ط)$$

اگر اس بات کو یاد رکھیں کہ سب مرکز سے تو زبر کو ارا سکتی ہیں اور مساوات کو اس طرح لکھ سکتی ہیں

$$۲ = (۱ - ی) (۱ - ط)$$

(۲) میں فرض کرو کہ لہ = ۰ تو ۲ = (۱ - ی) ط اسے قیمت کی نامکمل ہو جاتی ہے

اسے معلوم ہو کہ خط منحنی محور کو نہیں تقاطع کرتا۔ ہم (۱ - ی) ط کو ص سے تعبیر کرتے ہیں

اور محمد بن سب اور سب کو برابر ص کی مان لو ان محمد بن کے آگے ہمارا بڑا کام نکلیگا

تو ہم (۱) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$۲ = ص (۱ - ط + لہ) \quad (۳)$$

$$\text{اور (۲) کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں } ۲ = ص (لہ - ط) \quad (۴)$$

اور زیادہ ترقرینہ کے ساتھ ہم اس طرح لکھ سکتی ہیں $\frac{۲}{ط} = \frac{لہ}{ص} - \frac{۱}{ص}$ یعنی ط ۱ - ص لہ = ط ص (۵)

(۲۱۲) چونکہ لہ = ی ط ۱ اور ط ۱ = $\frac{۱}{۱ + ی}$ اسے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$لہ = ی ط = \frac{ی (۱ - ی)}{۱ - ی} = \frac{ی}{۱ + ی}$$

$$ط ۱ = \frac{۱}{۱ + ی} = \frac{۱ - ی}{۱ - ی}$$

$$س ۱ = س ۱ + لہ = ط + (۱ - ی) ط = ی ط$$

$$س ۱ = س ۱ - ط ۱ = ط - \frac{۱ - ی}{۱ + ی} = \frac{ط (۱ + ی) - (۱ - ی)}{۱ + ی}$$

$$\text{اور } ط ۱ = \frac{ط (۱ - ی)}{۱ - ی}$$

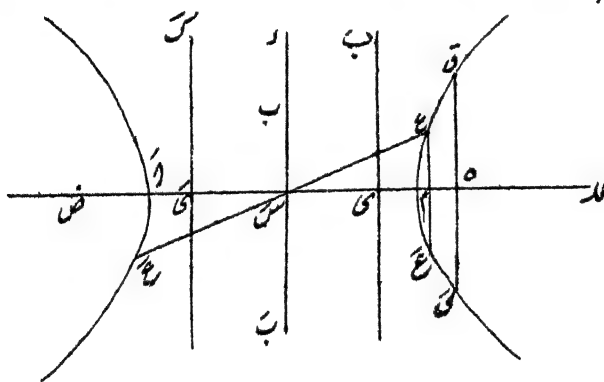
(۲۱۳) اب ہم شیعہ البیضوی کی دریافت کرتے ہیں۔ مساوات وہ لیتی ہیں جس میں سب مرکز

$$۲ = ص (لہ - ط) \quad (۱)$$

جو قیمت لگائی ط سے کم ہو اس کی موافق قیمت کی نامکمل ہوتی ہے اور جب لہ = ط تو ۲ = ۰

اور جتنی قیمتیں لاکے واسطے بری ہوں اور میں کے بریک واسطے وکی دو قیمتیں ہوتی ہیں جنکی مقدار ساوی ہی لیکن علامتیں مختلف - اسے معلوم ہوا کہ اگر ع ایک نقطہ خط منحنی پر محور لاکے ایک جانب میں ہو تو یہاں ع ایک نقطہ محور کی دوسری جانب میں ایسا ہی کر ع م سے م اسے معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی باعتبار محور لاکے ایک قرینہ رکھتا ہے اور لاکے دائیں جانب میں لدا تھا پہلیاے

اگر ہم لاکے منحنی قیمتیں میں تو بر قیمت کے واسطے رکے دہی دو قیمتیں نکلتی ہیں جو لاکے مثبت قیمت ہی نکلتی ہیں اسے معلوم ہوا کہ خط منحنی کا جیسا حصہ محور کی بائیں طرف ہی ویسا ہی دائیں واقع ہوتا ہے



چونکہ مساوات (۱) اس صورت میں لکھی جاسکتی ہے کہ

$$لا = \frac{ط}{س} (ر + ص) - (۲)$$

اسمیں ہم دیکھتے ہیں کہ محور خط منحنی کو قرینہ کی ساتھ قطع کرتا ہے اور خط منحنی س لاکے اوپر اور نیچے دونوں طرف پہلے پس خط منحنی میں دو فرع ہیں جو آپس میں ثابت تامة رکھتی ہیں اور غیر متناہی پہلتی ہیں

خطی کے خط منظم ہی اورہ نقطہ ہاسکی۔ چونکہ خط منحنی خط س ب کی ساتھ باقرینہ واقع ہوا ہے یہ بات نکلتی ہے کہ اگر س ص = س ہ اور س ی = س ی اور ی کے عمود س ی پر نکالیں تو نقطہ ص اور خط ی کے ایک دوسرا ہاسکہ اور خط منظم بنائینگے اور انکی وساطت سے

(۲۱۴) نقطہ سے کو مرکز عبید البیضوی کہتے ہیں اس کے کہ ہر وتر عبید البیضوی کا جو نقطہ سے پر گذرتا ہے

سے تصنیف ہوتا ہے اور یہ بات اوسطی ثبات ہو سکتی ہے جس طرح دفعہ ۱۶۳ میں بیان کیا گیا ہے

بیضوی میں ثبات ہوئی ہے خط منحنی کو مجوف بنایا ہے اس بات کی بیان کرنی سے شیعہ البیضوی

(۲۱۵) محور لا کی جانب میں ہم نے خط منحنی کو مجوف بنایا ہے اس بات کی بیان کرنی سے شیعہ البیضوی

کوئی فرع خط منحنی کی لین اس کے اور ایک نقطہ معین مقرر کریں اور اس کی راس اور اس نقطہ معین میں

خط مستقیم وصل کریں تو جو حصہ خط منحنی کا اس نقطہ معین اور راس کے درمیان ہوگا اس کی نقطہ

کا معین اور مستقیم کے نقطہ تناظر کے معین سے بڑا ہوگا

فرض کرو کہ لا راس اور ای مبدی اور ایک نقطہ معین ہے اور لا کے اس کی محدودین ہیں تو

مساوات عبید البیضوی کی موجب دفعہ ۲۱۱ کے یہ ہوگی

$$ص = ط (۲ ط لا + لا)$$

مساوات مع کی یہ ہے کہ

$$ص = ط (۲ ط لا + لا)$$

اس لئے کہ لا اور عبید البیضوی پر ہیں

فرض کرو کہ لا محدودین کے ہیں تو اس نسبت سے کہ معین خط منحنی کا $ص = ط (۲ ط لا + لا)$

یا $ص = ط (۲ ط لا + لا)$ لا اور خط مستقیم کا معین یہ ہے کہ $ص = ط (۲ ط لا + لا)$

اسے صاف ظاہر ہے کہ معین خط منحنی کا بڑا خط مستقیم کے معین سے ہے

(۲۱۶) لا اور ب کو محور عبید البیضوی کہتے ہیں محور لا کے جو خارج ہونے سے ہا کون پر گذرتا ہے

محور متقاطع کہتے ہیں اور ب کو محور مزدوج۔ بیضوی کی طرح ہم بیان محور اعظم اور اصغر کا

استعمال نہیں کرتے اس لئے کہ $ص = ط$ ہا $ص = ط$ موجب دفعہ ۲۱۱ کے اور یہ نسبت

کے زیادہ ہے تو ص بڑا ہوا ہے نسبت ط کے ہو سکتا ہے

عبید البیضوی کے کسی نقطہ کا بعد اس کے جو نسبت اس عبیدی کہتا ہے کہ میں اس نقطہ اور خط مستقیم

کے واقع ہیں اس کو نسبت خارج الکر عبید البیضوی کی کہتے ہیں اور اس نسبت کو ہم قری ہی تعبیر کریں

ع = می . ع = ق = می (س م - می) = می (لا - ط) = می لا - ط
اسے معلوم ہوا کہ ص ع - ع = ۲ ط یعنی بعید البیضوی کے کسی نقطہ کے ابعاد ماس کا تفاوت
برابر محور متقاطع کے ہوتا ہے

$$(۲۱۹) مساوات ۲ = \frac{ص}{ط} (لا - ط) \text{ کو اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ}$$

$$۲ = \frac{ص}{ط} (لا - ط) (ط + ط)$$

شکل دفعہ ۲۱۳ کو دیکھو تو معلوم ہوگا کہ

$$\frac{ع م}{م} = \frac{ب س}{س}$$

ماس اور عمود الماس بعید البیضوی

(۲۲۰) بعید البیضوی کے کسی نقطہ کے ماس کی مساوات دریافت کرو

دفعہ ۱۷ کی طرح عمل کرنے سے ہم کو یہ معلوم ہوگا کہ مساوات ماس (لا و) کی یہ ہوگی کہ
ر - ۲ = \frac{ص}{ط} (لا - لا)

یعنی ط لا و ص لا لا = - ط ص
یہاں تین سطح حاصل ہو سکتی ہیں کہ بیضوی کے مساوات میں اسی قبیل کی لکھیں اور اس میں ص کی جگہ ص
(۲۲۱) دفعہ ۱۷ کے موافق مساوات ماس بعید البیضوی کی اس طرح لکھی جاسکتی ہیں کہ

$$ر = م لا + م ط - ص$$

اور عکس کے مساوات کی یہ صورت ہووے بعید البیضوی ماس کی مساوات ہوگی

(۲۲۲) جس طرح دائرہ میں ثابت ہوا ہے کہ ماس و س کو صرف ایک ہی نقطہ پر مس کرتا ہے اس طرح

بعید البیضوی میں ثابت ہو سکتا ہے کہ وہ ایک نقطہ پر مس کرتا ہے

اور اگر ایک خط بعید البیضوی سے ایک نقطہ پر ملتا ہے تو وہ اگر ماس بعید البیضوی کو اس نقطہ پر ملتا ہے

$$\text{اس واسطے کہ فرض کرو } ط - ۲ = ص لا = ط ص$$

مساوات بعید البیضوی کی ہو اور

$$ر = م لا + م س$$

مساوات خط مستقیم کی ہو تو اون کے تقاطع کے متحد دریافت کر نیکی واسطے

ط (م ل + س) - ص لا = - ط ص

یا (ط م - ص) لک + ر ط م س لک + ط (س + ص) = .

اس مساوات کی ہمیشہ دو قیمتیں ہوتی ہیں اللہ

$$- (1) \text{ ط م س } = (\text{ط م} - \text{ص}) (\text{س} + \text{ص})$$

فرض کرو کہ نقطہ ج کے لگ بھگ محمدین ہوں اور ع ت مماس نقطہ ج پر اور ع ج عمود المماس

نقطہ ج کا ہو اور ع م اور ع ق عمود محورون پر نکالو

مساوات مماس کی نقطہ ج پر یہ ہے

$$\text{ط} \text{آ} \text{د} = \text{ص} \text{ل} \text{د} = \text{ط} \text{آ} \text{ص}$$

فرض کرو کہ د = ۰ تو ل د = $\frac{\text{ط} \text{آ}}{\text{ل} \text{د}}$ اسے معلوم ہوا کہ

$$\text{ص ب} = \frac{\text{س م}}{\text{س ل}}$$

۱۔ س ت . س م کے س ل

اور علیٰ هذا القیاس س ن . اس ت = س ب

(۲۲۶) دفعہ ۱۷۱ کے موافق ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\text{س ج} = \text{ج} \text{آ} \text{س م}$$

$$\text{س ج} = \frac{\text{ط} \text{آ} \text{ج}}{\text{ع م}}$$

(۲۲۷) دفعہ ۱۷۱ کے موافق ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{ع ج} = \frac{\text{ص ل} \text{ج}}{\text{ط} \text{آ} \text{ج}} \text{ اور } \text{ع ج} = \frac{\text{ط} \text{آ} \text{ج}}{\text{ص ل} \text{ج}}$$

(۲۲۸) کسی نقطہ سے مماس نکال کر اس نقطہ کی البعاد مکہ کے زاویہ درمیانی کی ضمیمہ

دفعہ ۱۷۱ میں جس طرح عمل کیا ہے یہاں بھی وہی عمل کرنے سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\text{ص ج} = \text{ع ج} = \text{ع ج}$$

اور اس سے ج ح پر ع ت کے عمود ہونی سے

یہاں اس نتیجہ کو اس طرح ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{س ج} = \text{ج} \text{آ} \text{س م} \text{ لگ بھگ دفعہ ۲۲۶ کے}$$

$$\text{ص ج} = \text{ج} \text{آ} \text{س م} + \text{ط ج}$$

$$\text{ع ج} = \text{ج} \text{آ} \text{س م} - \text{ط ج}$$

$$\text{اور یہ ص ج} = \text{ج} \text{آ} \text{س م} + \text{ط ج} \text{ اور } \text{ع ج} = \text{ج} \text{آ} \text{س م} - \text{ط ج}$$

$$\text{اسے معلوم ہوا کہ } \frac{\text{ص ج}}{\text{ع ج}} = \frac{\text{س م}}{\text{س ل}}$$

اسی واسطے حکم (۳۷) ش ۶ م اقلیدس کے ع زاویہ درمیانی ع اور ص ع محدودہ کی

تضییف کرتا ہے یعنی $ص ع ح = ع ح$

یعنی $ص ع ح = ع ح$

(۳۹) بعید البیضی کی کسی نقطہ پر ایک خط ماس ہی اور یکہ سی کو سپر عمود نکالا گیا ہی تو اس عمود اور ماس کے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

دفعہ ۱۰ میں جس طرح ثابت ہوا یہاں بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ مقام النقاط مطلوبہ ذرا ہی جو محور تقاطع کو قطر مقرر کر کے لہجین

(۴۱) فرض کرو کہ عمود کو تعبیر کرتا ہی جوہ سے ماس نقطہ پر نکالیں اور ع راس عمود کو جو ماس پر نکالا جائے تو دفعہ ۱۱ کی طرح یہاں بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$ع = ص ح ی \text{ اور } ع = ص ح ی \therefore ع ع = ص$$

چونکہ $ع = ط + نق$ تو ہم کو یہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$ع = \frac{ص ح ی}{ط + نق}$$

(۴۱) نقطہ بعید البیضی کی دو ماس پر نقطہ بیرونی سی کیج سکتی ہیں فرض کرو کہ ح وق محدودین نقطہ بیرونی کے ہیں تو دفعہ ۱۲ کی طرح حکم مساوات ذیل حاصل ہو جسے محدود نقاط ماس ماسوں اور بعید البیضی کے معلوم ہو جائینگے

$$لا (ط ا - ص ح) + ط ط ص ح - لا ط (ص ح + ق) = ۰$$

اس مساوات درجہ دوم کی قیمتین ممکن ہونگیں اگر

$$ط ص ح + ط (ص ح + ق) (ط ا + ص ح) \text{ مثبت ہو یعنی اگر}$$

قی ط - ص ح + ط ص ح مثبت ہو سکتا ہے دو ماس اور نقطہ بیرونی

لیکن اگر (ح وق) نقطہ بیرونی ہو تو آخر حلا مثبت ہوگا اسی واسطے دو ماس اور نقطہ بیرونی بعید البیضی کی کیج سکتیگی حاصل ضرب لا کے دو قیمتوں کا مساوات درجہ دوم مذکور میں یہ ہے

ط (ص + ق)

ط (ص + ق) -

ابری حاصل ضرب مثبت یا منفی موافق طاق - صراح - صراح کے ہوگا یعنی اگر مثبت تو وہ بھی مثبت ہی اور اگر منفی تو منفی یعنی اگر طاق - صراح مثبت ہی تو وہ ماس اکبری بعید البیضی کی ہوگی اور اگر وہ منفی ہی تو مختلف موضوع کی یہ صورت

طاق - صراح = قابل کہنے کی ہی - یہاں ایک قیمت درج کی غیر متناہی ہو جاتی ہے اور دوسری قیمت یہ ہوتی ہے کہ ط (ص + ق) جو متناہی کلاب ۱۲ اور اس صورت میں نقطہ (ح وق) ایک خاص خط میں واقع ہوتا ہے اور اس خط کو متغی الملاقات کہتے ہیں اور اس کا ذکر دفعہ ۲۵ میں کرتے ہیں - جیسی نقطہ (ح وق) سے دو ماسوں کے نکلنے کی کیفیت تھی ویسی ہی خط متغی الملاقات کی صورت ہی اگر ح = ۱۰ اور ق = ۱۰ تو نقطہ ح اور ق سب در یک منطبق ہوگا پس اس صورت میں دو خط متغی الملاقات کا حساب اویس طرح لگ سکتا ہے جس طرح دو ماسوں کا نقطہ (ح وق) سے ہوا ہے

(۲۳۲) ایک نقطہ بیرونی سی بعید البیضی کی دو ماس نکالی ہیں مساوات و ترماس کی دیا فرض کرو کہ ح وق محدودین نقطہ بیرونی کے ہیں تو مساوات و ترماس کی طاق - صراح = صراح - ط (ص + ق) ہوگی (دفعہ ۱۸۵ دیکھو)

(۲۳۳) ایک نقطہ معین سے اوتار بعید البیضی کے کچے گئے ہیں اور ہر وتر کی اطراف سی ماس نکالے گئے ہیں تو ان ماسوں کے نقاط تقاطع کا مقام النقاط ایک خط مستقیم ہوگا فرض کرو کہ ح وق محدودین اوس نقطہ کی ہیں جس کے وتر نے گئے ہیں تو ماسوں کے نقاط تقاطع کی مقام ان کی مساوات یہ ہوگی کہ

طاق - صراح = صراح - ط (ص + ق) (دفعہ ۱۸۴ دیکھو) اگر ایک خط مستقیم کی کسی نقطہ سے بعید البیضی کے دو ماس نکالیں تو اوتار ماس ایک معین پر گزرتے ہیں (دفعہ ۱۸۵ دیکھو)

(۲۳۵) طالب علم کو چاہیے کہ مختلف معنی اس مساوات کی خوب سمجھی دفعہ ۱۰۳ میں جو دائرہ کے باب میں بیان ہوا ہے وہی بعید البیضی کے باب میں بیان ہو سکتا ہے

مثالین

(۱) مساوات اوس بعید البیضوی کی بناو جسکا محور متقاطع معلوم ہی اور اوسکا راس فاصلہ کی تنصیف کرتا ہی جو مرکز اور ہیکہ کے مابین واقع ہو

(۲) معین م ع بعید البیضوی کا ق تک ایسا خارج کرو کہ م ق = ص ع تو مقام النقاط کا

(۳) بعید البیضوی کے راس سے ایک وتر لے کچا گیا ہی اور نقطہ ق پر سطح تقسیم ہوا کہ

لاق : ق ع :: اس : ب س اور ق م معین م ع کے طرف پائیں تک کچا گیا ہی اور نقطہ

ق سے ایک خط زاویے قائم بنا تا ہوا ق م پر اور محور متقاطع سی نقطہ ط پر ملتا ہوا کچا گیا

تو ثابت کرو کہ ل ط : ل ا ط :: اس : ب س

(۴) ع ق وتر بیضوی کا زاویے قائمے محور اکبر ل ا پر بنا تا ہی اور ع ل اور ق ل خارج ہو کر

پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ مقام النقاط ر کا بعید البیضوی ہی دی محور میں جو بیضوی کے ہے

(۵) اگر دائرہ بعید البیضوی معلوم کے نقطہ ع پر اور محور متقاطع کی طرفین پر سے گزرتا ہوا

دائرہ کچیں اور معین م ع خارج ہو کر دائرہ سی نقطہ ق پر ملتا ہی تو ثابت کرو کہ مقام النقاط ق کا

بعید البیضوی ہی جسکا محور مزدوج تناسب میں اصل بعید البیضوی کے متقاطع اور مزدوج محوروں

میں تیار ہے

(۶) ایک ایسی نقطہ کا مقام النقاط دریافت کرو کہ جسے دو ماس بیضوی کے نکالیں اور وتر میں

پر عمود ماسکوں سے نکالیں تو ان عمودوں کا حاصل ضرب ہمیشہ مستقل ہو

بار سوال باب

بعید البیضوی

(۱۳۶) ایک خط جو کسی نقطہ سے سمت معلوم میں کچا جای اور بعید البیضوی سے ملی تو اس کا

طول دریافت کرو

فرض کرو کہ لاؤء محمد بن اوس نقطہ کے ہیں جسے خط کچا گیا ہی اور لاؤء محمد بن اوس نقطہ کے ہیں جس تک خط کچا گیا ہی اور لاؤء میلان خط کا محور لا کے ساتھ ہی اور طول اوس کا نقی ہی تو بموجب دفعہ (۱۷۵) کے لاؤء $ق + جم = ر$ اور $ق + جبر = (۱)$ اگر (لاؤء) بعید البضوی پر ہوں تو یہ قیمتیں مساوات $ق - ر = ص$ لاؤء $ط - ص = ط$ اصل میں کہی جاسکتی ہیں پس ان قیمتوں کے کہنے سے یہ حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} & ط (ق + جبر) - ص (ق + جم) = ط - ص \\ & : ط (جبر - ص جم) + ص (ق - ر) = ط - ص \\ & (۲) \quad ط - ر = ص (ق - ر) + ط (جبر - ص جم) \end{aligned}$$

اس مساوات درجہ دوم قیمتیں نکال ہونگی اور وہ طول اور عرضوں کے ہونگے جو نقطہ (لاؤء)

سے بعید البضوی تک سمت معلوم میں کیج کے ہیں

(۲۳۷) بعید البضوی نظام معلوم او متوازن کا قطر دریافت کرو (دفعہ ۱۷۸ کا محدود مکمل) فرض کرو کہ بعید البضوی کے محور تقاطع کے ساتھ او متوازن پر پل رکتے ہیں اور لاؤء محمد بن اوس نقطہ وسط کی تر کے وتر ہیں سے ہیں تو مساوات جتنی طول خطوط کے جو نقطہ (لاؤء) سے خط منحنی تک کچی جائیں یہ ہے

$$\begin{aligned} & ق (ط - جبر - ص جم) + ر (ط - جبر - ص جم) = ط - ص \\ & (۱) \quad ط - ر = ص (ق - ر) + ط (جبر - ص جم) \end{aligned}$$

چونکہ (لاؤء) نقطہ وسط وتر کا ہے تو ان کی قیمتیں اس مساوات سے دریافت ہونگیں آپ میں بجا اقدار کے مساوی ہونگیں اور باعتبار غلامت کے مختلف اسے معلوم ہوا کہ امثال نق کے برابر صفر کے ہوں یعنی

$$\begin{aligned} & ط - جبر - ص جم = ر - ص جم = ط - ص \\ & (۲) \quad ط - ر = ص (ق - ر) + ط (جبر - ص جم) \end{aligned}$$

لاؤء کو متغیر سمجھیں تو یہ مساوات اوس ایک خط مستقیم کی ہے جو مسدود میں گذرتا ہے

یعنی مرکز بعید البیضوی کے لیے معلوم ہوا کہ ہر قطر مرکز گزرتا ہی
 اور نیزہ مستقیم جو مرکز میں گزرتا ہی قطر ہے یعنی ایک نظام اوتار متوازیہ کو تنصیف
 اس واسطے کہ اس کی مناسب قیمت مقرر کرنے سے مساوات (۲) اس خط کو تعبیر کریگی جو مرکز
 میں گزرتا ہی اگر زاویہ میلان محور لگے ساتھ اس قطر کا ہو جو اون تمام اوتار متوازیہ کو جو
 محور کے ساتھ زاویہ پر پیل رکھے تنصیف کرتا ہے تو (۲) سے ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{مس} = \frac{\text{ص}^2}{\text{م}} \\ \text{مس} = \frac{\text{مس}^2}{\text{ص}^2} \quad (۳)$$

(۲۳۸) اگر ایک قطر سب وتروں کو جو دوسرے قطر کے متوازی ہیں تنصیف کرتا ہی تو دوسرا قطر
 اون سب وتروں کی تنصیف کریگا جو پہلے قطر کے متوازی ہیں
 فرض کرو کہ ر اور س زاویے میلان دو قطروں کے بعید البیضوی کے محور تقاطع کے ساتھ ہیں
 چونکہ اول قطر دوسرے قطر کے اوتار متوازیہ کی تنصیف کرتا ہی ہے لہذا ہم کو یہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$\text{مس} = \frac{\text{مس}^2}{\text{ص}^2}$$

اور یہی شرط ہونی چاہی کہ دوسرا قطر پہلے قطر کے سب متوازی وتروں کی تنصیف کرے
 دفعہ ۱۹۱ کا حد و بعید البیضوی کے واسطے ہی ہے

(۲۳۹) ہر خط مستقیم جو مرکز بیضوی میں گزرتا ہی بیضوی ہی ملتا ہی اور یہہ شکل سی ہی ظاہر ہے
 اور اس کو بخلیلی سے بھی ثابت ہی۔ لیکن یہ بات بعد البیضوی میں نہیں ہی آگے اسے
 ثابت کر دینگے

(۲۴۰) جو خط مستقیم مرکز میں گزرتا ہی اس کے اور بعید البیضوی کے نقاط تقاطع دریافت کرو
 فرض کرو کہ مساوات خط مستقیم کی یہ ہے کہ

اس قیمت کو مساوات بعید البیضوی کے واسطے لگاؤ = $\frac{\text{ص}^2}{\text{م}}$ میں رکھو
 تو نقاط تقاطع کے محدود دریافت کرنے کے واسطے یہ مساوات حاصل ہوگا کہ

$$(طام - عا) لا = طاص$$

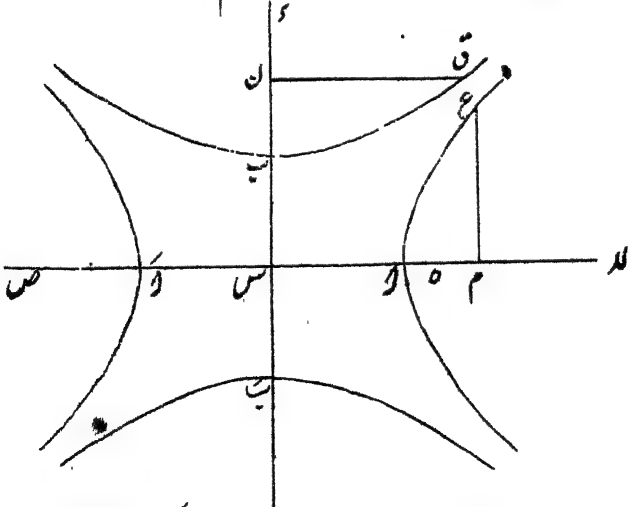
$$لا = طاص$$

اسے معلوم ہوا کہ اگر طام بڑا ہے تو لا کی قیمتیں ناممکن ہو جائیں گی
پس ثابت ہوا کہ نقطہ مرکز بعید البیضوی میں کھینچا گیا بعید البیضوی سے نہیں ٹکا اگر وہ محور تقاطع کے
کسی طرف زاویہ ایسا بنائے جو بڑا ہو اس سے ہو

(۱۶۱) بعید البیضوی کے باب میں تو عمودوں کے بیان کرنے کے لیے ضروری ہے کہ ہم یہ حد درجہ سے
تھوڑے سے بعید البیضوی میں ایسی ہوں کہ ہوا ایک بعید البیضوی میں محور تقاطع ہو وہ دوسرے بعید البیضوی
محور مذکور ہو اور جو بعید البیضوی کا محور مذکور ہو وہ دوسرے محور تقاطع ہو تو دوسرے بعید البیضوی

کو بعید البیضوی مذکور کہتے ہیں

(۱۶۲) ایک بعید البیضوی معلوم کے فرد بعید البیضوی کی مساوات دریافت کرو
فرض کرو کہ لا اور ب بعید البیضوی معلوم کے تقاطع اور فرد بعید البیضوی تو ب محور تقاطع اور
لا محور مذکور بعید البیضوی فرد کا ہو گا۔ فرض کرو کہ ع نقطہ معلوم بعید البیضوی میں ہے
اور ق ایک نقطہ بعید البیضوی فرد میں ع م اور ق ن عمود



س لا اور س پر نکالو۔ مساوات بعید البیضوی کی یہ ہے کہ

$$ص = (لا - طاص)$$

$$ند م = (س م - س ا)$$

پس معلوم ہوا کہ $ل = \frac{ص}{س} (سن - س)$ (سے) ہیں
چونکہ ق ایک نقطہ بعید البضوی ہے تو س ب اور س نصف محور تقاطع اور نصف محور مزدوج
پس اگر $ل$ و $د$ محدودین نقطہ ق کو تعبیر کریں تو

$ل = \frac{ط}{ص} (د - ص)$ کہتے ہیں کہ اگر اصل بعید البضوی کی مساوات
اسی لیے مساوات بعید البضوی مزدوج کی ہی اور ہم یہ کہتے ہیں کہ اگر اصل بعید البضوی کی مساوات
ط کی جگہ $ط$ لکھ دیتے اور $ص$ کی جگہ $ص$ تو اسے مساوات بعید البضوی مزدوج کی معلوم
اس کے بعید البضوی مزدوج کے خطاب س ب پر ہونگے اور اس کا فاصلہ $س$ سے $= د$ ب موجب دفعہ
۲۱۶ کے ہوگا یعنی وہی فاصلہ ہوگا جو $ص$ اور $د$ کا $س$ سے ہے
(۲۱۳) بعید البضوی کے مرکز سے کوئی خط مستقیم کھینچا جائے اور بعید البضوی سی یا بعید البضوی
مساوات $ل$ و $د$ دو خطوط بحر محور تقاطع بعید البضوی کے اسے اس زاویہ $= س$ اسی پر میل رکھتے ہیں
فرض کرو کہ مساوات خط مستقیم کی یہ ہو کہ

مساوات جسے نقاط تقاطع (۱) اور بعید البضوی کے معلوم ہوں موجب دفعہ ۲۱۶ کی یہ ہے کہ
 $ل = \frac{ط}{ص} (د - ص)$ (۱)
اور علیٰ ہذا القیاس مساوات جسے نقاط تقاطع (۱) اور بعید البضوی مزدوج کے معلوم ہوں یہ ہے کہ
 $ل = \frac{ط}{ص} (د - ص)$ (۲)

اگر $م$ کم نسبت $ص$ کے ہو تو (۲) میں قیمتیں ممکن اور (۳) میں قیمتیں ناممکن لاکھی ہونگی اور
اگر $م$ بڑا $ص$ سے ہو تو (۲) میں ناممکن قیمتیں اور (۳) میں ممکن قیمتیں لاکھی ہونگی اور اگر
 $م = ص$ تو (۲) اور (۳) کی قیمتیں لاکھی غیر متناہی ہونگی پس اسے ثابت ہوا کہ دو خط بحر
محور تقاطع بعید البضوی معلوم سے زاویہ برابر $س$ کے بنائے ہیں انہیں سے کوئی
بھی کسی خط انحنی سے نہیں ملتا اور ان خطوط میں سے ہر ایک خط کسی ایک بعید البضوی سی ملتا

(۲۷۴) مختار مروج میں سے ایک صلی بعید البیضوی سی اور دوسرے بعید البیضوی

فردوس سی طیبی

فرض کرو کہ ساوا تین قطرون کی یہ ہیں

تو موجب دفعہ ۳۸ کے مہل = چھ = یا مہل = ۴ = ۱۶

اسے معلوم ہوا کہ تم کم بہ نسبت صلیک کے ہو تو تم بڑا بہ نسبت صلیک کے ہو گا اسے معلوم ہوا کہ
قطر اصل بعید البیضوی سے متناسب اور دوسرا بعید البیضوی مزدوج سی۔ اگر کم بڑا
سے ہو تو تم کم بہ نسبت صلیک کے ہو گا پس معلوم ہوا کہ اول قطر بعید البیضوی مزدوج سے
متناسقی اور دوسرا اصل بعید البیضوی سے

(۲۴۵) اب ہم بعض خواص اقطار مذہب ساین کرتی ہیں۔ جب ہم کہتے ہیں کہ قطر کی طرف

مراد وہ نقطے ہوتے ہیں جس پر قطر اصل بعید البصنوی کو یا فرد بعید البصنوی کو قطع کرتا ہے

سم اس بات کو کہہ سکتے ہیں کہ اصل بعید البیضوی کو جو ارتباطات باہمی بعید البیضوی (زوج

سے ہوتی ہیں وہی بعید البیضوی فرد وچ کو اصل بعید البیضوی سے تعلقات بنوہیں پس اب

اب اس طرح انکا تعریف ہو سکتی ہے کہ دو بعید البضویان مزدوج کہلاتی ہیں جب اونہیں سے ایک

محور متقاطع دوسرے محور مزدوج ہو اور نیز اگر ایک خط تمام اوتار متوازیہ کی جوں ایک مضبوطی

پر ختم ہوتے ہیں تھیں کہ ہاں تو وہ تمام و ترونکی جو در سر بعد البیضوی پر ختم ہوتے ہیں

تخصیف کر لگا۔ اس وقت کہ مساوات دفعہ ۲۲ کی مس رسر = $\frac{1}{2}$ پلے میں کچھ تبدیلی نہیں

موتاج ہم۔ طا کو کھای طا کے اور۔ ص کو کھای ص کے لکھیں یعنی جب ہم لکھیں

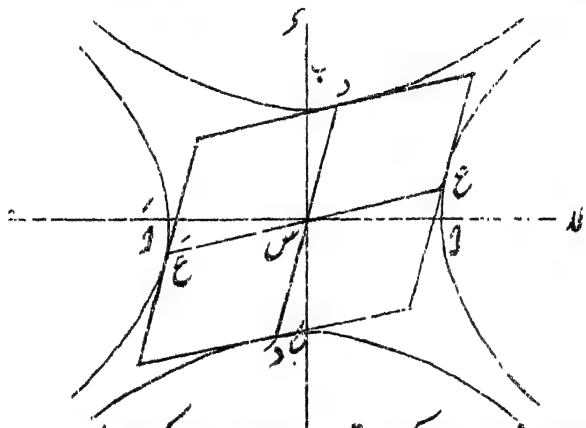
اصل سے بعید البیضوی مزدوج کی طرف مراجعت کریں (صفحہ ۴۸۴) دونوں خط مخفی اصل و

میں شامل ہیں کہ $(\eta_1 - \eta_2) = \eta_1 \eta_2$

(۱۶۶) کہ ہر قطر کے ایک طرف سی جو ماس نکلا جا تو وہ متوازی اون وتر من ہو

حکے قطر تصنیف کرتا ہی دفعہ ۱۹ دیکھو

باب ۲۸۸ کے ایک طرف کے محو دین معلوم میں قطر مزدوج کے ہر ایک طرف کے محو دین ثابت کرو
فرض کرو کہ اس د اور ب س ب محور بعید البیضوی کے ہیں اور ع س ع اور د س د دو قطر مزدوج ہیں



اور لہ د و محو دین نقطہ ع کے ہیں تو مساوات س ع کی یہ ہے

$$(۱) \quad \frac{د}{لہ} = \frac{س}{ع}$$

چونکہ قطر مزدوج د و متوازی نقطہ کے تماس ع کا ہو تو مساوات د و کی یہ ہے

$$(۲) \quad \frac{د}{لہ} = \frac{س}{ع}$$

اب ہم مساوات (۲) کو مساوات بعید البیضوی مزدوج کے ساتھ ملا کر محو دین د اور د کے دریافت کرتے ہیں (۲) سے نکال کر

$$\begin{aligned} \frac{د}{لہ} &= \frac{س}{ع} \\ \frac{د}{لہ} &= \frac{س}{ع} \\ \therefore (س لہ - د ع) &= ۰ \\ \therefore \frac{د}{لہ} &= \frac{س}{ع} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{د}{لہ} = \frac{س}{ع}$$

شکل میں محو د کا مثبت ہی اور د کا منفی ہے اسے معلوم ہوا کہ اوپر کی علامت سی د اور د

علامت سے د مراد سے کے مربع کا تفاوت متعلق ہوتا ہے کہ یہی متغیر نہیں ہوتا
(۲۸۸) دو مزدوج نصف قطران کے مربع کا تفاوت متعلق ہوتا ہے کہ یہی متغیر نہیں ہوتا

اگر نقطہ کو بعید البیضوی پر لگی جانب سے متحرک کریں تو سید باط کو تقابلاً چاہیں گے
 کر سکتے ہیں۔ اور نیز اس سبب سے کہ ط۔ صغ مقدار مستقل ہے ط کے ٹرنے سے آؤسکی
 ساتھ ص ہی بڑھتا ہی۔ پس جب ہر مقدار چاہیں چھوٹی ہو سکتی ہی یعنی سید اور س د
 کو ایسا قریب کر سکتے ہیں جس قدر چاہیں تمام خصوصیات کی طرف وہ میل کر رہتے ہیں آسانی سے
 دریافت ہو سکتا ہی اس واسطے کہ موجب دفعہ ۲۷۸ کے

پس جب سید اور س د کی منطبق ہوئے پر فوت پہنچتی ہے اس وقت م اور م کی حد
 \pm چھانے کے قریب پہنچتی ہے
 (۲۵۱) دفعہ ۲۷۹ سے ہر کوسہ حاصل ہی کہ

$$ع = \frac{ط}{ص} = \frac{ط}{ص + ط} = \frac{ط}{ص} \text{ موجب دفعہ } ۲۷۸ \text{ کے}$$

اس مساوات سے وہ ارتباط معلوم ہوتا ہی جو عمود کے مرکز نکال لایا نقطہ کے تماس سے پر بعد س
 سے رکھتا ہی جو اس نقطہ اور مرکز کے درمیان واقع ہے
 اگر س اور س زاویہ کو تعبیر کرے جو عمود محور تقاطع کے ساتھ بنا ہی تو ہم دفعہ ۱۹۶ میں ثابت کر
 (۲۵۲) اقطار مزدوج کو محور مقرر کر کے مساوات بعید البیضوی کی دریافت کرو
 فرض کرو کہ سید اور س د دو اقطار مزدوج ہیں (شکل دفعہ ۲۷۸ دیکھو) سید اور س د
 لد اور س د کو محور قرار دو اور س = لد = ہر اور دس = لد کے فرض کرو
 اور لد و محمد دین بعید البیضوی کے کسی نقطہ کے لجا ط اصل محور کے اور لا و لجا ط ہی
 محور کے فرض کرو

تو موجب دفعہ (۸۷) کے

$$لد = لا حم ہ + د حم ب$$

$$= لا جب ہ + د خف ب$$
 ان قیوہ نکو مساوات

$$ط = ص لد = ط ص - ط ص$$
 تو ط (لا جب ہ + د حم ب) - ص (لا حم ہ + د حم ب) = - ط ص
 یا لا (ط اح ہ - ص حم ہ) + د (ط جب ب - ص حم ب)

$$+ \text{لا}^2 \text{ (طاجب ج ب - ص جم ج ب) } = - \text{ط ص}$$

لیکن سہ اور سہ و قطار مزدوج ہیں اسلئے

$$\text{س ج ج ب} = \text{ص ج ج ب}$$

اس سبب اشغال لا کو کے فنا ہوتی ہیں اور مساوات کی یہ صورت ہوتی ہے کہ

$$\text{لا}^2 \text{ (طاجب ج ب - ص جم ج ب) } + \text{لا}^2 \text{ (طاجب ج ب - ص جم ج ب) } = - \text{ط ص}$$

اس مساوات میں فرض کرو کہ $\text{لا}^2 = 0$ تو

$$\text{لا}^2 = \frac{- \text{ط ص}}{\text{ص ج ج ب} - \text{ط ج ج ب}} = \frac{\text{ط ص}}{\text{ص ج ج ب} - \text{ط ج ج ب}}$$

اور یہ قیمت سہ کی ہے جو ط سے تعبیر ہو سکتا ہے

اگر ہم $\text{لا}^2 = 0$ کے مساوات بالا میں درج کریں تو ہلکویہ حال ہو گا کہ

$$\text{لا}^2 = \frac{\text{ط ص}}{\text{ص ج ج ب} - \text{ط ج ج ب}}$$

اب چونکہ ہم یہ فرض کیا ہے کہ محور جدید لا کا خط منحنی کے ملتا ہے تو ہم کو جب دفعہ ۲۴ کے پہلے معلوم ہو گا کہ محور جدید لا کا خط منحنی سے نہیں ملتا پس

$$\text{لا}^2 = \frac{\text{ط ص}}{\text{ص ج ج ب} - \text{ط ج ج ب}}$$

ایک ثابت مقدار نہیں ہے اسلئے ہم اس کو ص ج ج ب سے تعبیر کر سکتے ہیں اس سبب مساوات بعد البیضوی کی بلحاظ اقطار مزدوج کے یہ ہوگی

$$\text{لا}^2 = \frac{\text{ط ص}}{\text{ص ج ج ب} - \text{ط ج ج ب}}$$

یا تعادیر تبخیر سے زیر کو اڑا دو تو

$$\text{لا}^2 = \frac{\text{ط ص}}{\text{ص ج ج ب} - \text{ط ج ج ب}}$$

اور نیز مساوات بعد البیضوی مزدوج کی بلحاظ او نہیں محوروں کے

$$\text{لا}^2 = \frac{\text{ط ص}}{\text{ص ج ج ب} - \text{ط ج ج ب}}$$

مساوات بعد البیضوی کی ماس کی بھی وہی صورت ہوگی جو اس کی ہوتی ہی خواہ محور قائم الزاویہ خواہ غیر قائم الزاویہ زوج اقطار مزدوج سے نہیں دفعہ ۲۰ کو دیکھو

(۲۵۴) کسی وتر بعید البیضوی کے اطراف سے جو بناس نکالیں وہ اوس قطر پر گزرتے ہیں جو اوس وتر

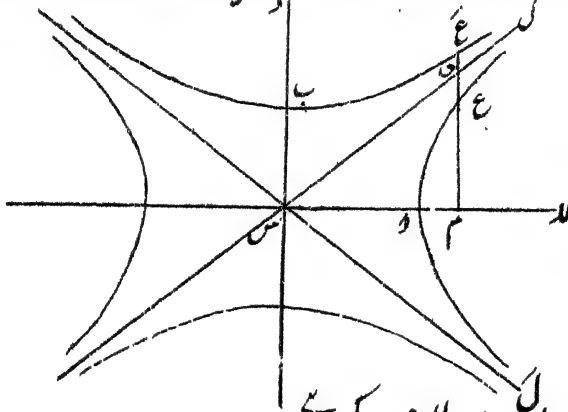
کی تقصیص کرتا ہی دہشہ ۲۰۱ دیکھو

(۲۵۵) اگر بعید البیضوی کے قطر اور وتر باہم متوازی ہوں تو وتر کی قطر مزید دو کا ہوگا

(دفعات ۲۰۲ و ۲۰۳ دیکھو)

خطوط متلفع العلاقات

(۲۵۵) اب تک ہم نے جو بعید البیضوی کے خواص بیان کئے ہیں وہ بیضوی کے خواص کے بہت مشابہت رکھتے ہیں وہ خواص بعید البیضوی کے بیان کرتے ہیں جو مخصوص بعید البیضوی کے ساتھ ہیں



فرض کرو کہ مساوات بعید البیضوی کی یہ ہے

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} (y^2 - c^2)$$

اور فرض کرو کہ س ل ایسا خط ہی جس کی مساوات یہ ہے کہ

$$\frac{y}{x} = \frac{c}{a}$$

فرض کرو کہ مربع ق ایک معین بعید البیضوی کا ہے جو بعید البیضوی کے نقطہ ل پر اوس کے نقطہ ق ملتا ہی تو اگر س م کو ل کے تعبیر کریں تو

$$ع = م = \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{اور} \quad ق = م = \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$س = ق = \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - c^2} = \left[\frac{a}{b} \sqrt{a^2 - c^2} \right] \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2} \sqrt{a^2 - c^2}$$

اگر اسے خط مربع ق اس طرح متحرک ہو کہ ہمیشہ اپنا متوازی رکھے تو فاصلہ ع ق برابر کم ہوتا جائیگا

بارہواں باب ۱۸۵
 اور سہم کو کافی بڑا کر ع ق کو جتنا چاہیں گہٹا سکتے ہیں۔ خط س ل کو خط متنع الملاقات خط

منحنی کہتے ہیں
 اور علی ہذا القیاس خط س ل جبکہ مساوات یہ ہے

$$s = \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط}$$

 خط متنع الملاقات کہتے ہیں
 پس مساوات

$$\frac{ط}{ط} - \frac{ص}{ص} = ۰ \text{ میں دو خطوط متنع الملاقات شامل ہیں}$$

حد متنع الملاقات وہ خط مستقیم ہوتا ہے کہ جس کا فاصلہ خط منحنی کی ایک نقطہ سے اتنا بڑا جیسا کہ ہوتا جاتا ہے
 جتنا یہ نقطہ لا انتہا فاصلہ پر سب سے ہوتا جاتا ہے

بعد نقطہ کا س ل سے ع ق جب ع ق س ہی اور ہم لکھ آئی ہیں کہ ع ق بحد کم ہوتا جاتا ہے
 جیسا کہ ع سب سے یک متحرک ہوتا ہے تو س ل متنع الملاقات بموجب حدود کے ہوا

(۲۵۶) اس طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ س ل متنع الملاقات بعید البیضوی مزدوج کا ہی ہے
 اس واسطے کہ ع ق کو خارج کر کے بعید البیضوی مزدوج سے نقطہ ع ق پرین تو بموجب دفعہ ۱۴۲

$$ع ق = \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط}$$

اسے معلوم ہوا کہ س م غیر متناہی زیادہ ہوا، اور ع ق غیر متناہی کم ہوا، اسی واسطے س ل بعید البیضوی
 مزدوج کا متنع الملاقات ہے

(۲۵۷) مساوات بعید البیضوی کی نقطہ (ل د و) پر یہ ہے کہ

$$ط ل د و - ص ل ل د و = ط ص$$

$$ط ل د و - ص ل ل د و = ط ص$$

$$\frac{ط ل د و}{ط} - \frac{ص ل ل د و}{ص} = \frac{ط ص}{ط}$$

$$\frac{ط ل د و}{ط} - \frac{ص ل ل د و}{ص} = \frac{ط ص}{ط}$$

اگر ل د و غیر متناہی بڑا جائے تو جبکہ قریب مساوات مذکور ہوتی ہے یہ ہے کہ

$$s = \frac{ص}{ط}$$

پس اسے معلوم ہوا کہ بعید البصوی کا تماس ہمیشہ متعین الملاقات کے منطبق ہو گیا قریب ہوتا ہی

جب نقطہ تماس اصل سے آگے کی طرف غیر متناہی حرکت کرتا ہی

(۲۵۸) دفعہ ۲۴ سی ظاہر ہوتا ہی کہ خط استقیم مرکز بعید البصوی سی کسی گایا بعید البصوی سی یا

بعید البصوی مزدوج سی لمبا ہی بشرطیکہ او سکی سمت منطبق خطوط متعین الملاقات کے کسی ایک ہی سمت

اور دفعہ ۲۵ سی ظاہر ہوتا ہی کہ اقطار مزدوج لا انتہا زیادہ ہوتے ہیں تو وہ خطوط متعین الملاقات میں

ایک پر منطبق ہونے کے قریب پہنچتی ہیں

(۲۵۹) اقطار مزدوج کی اطراف میں جو خط وصل کیا جاوے وہ ایک متعین الملاقات کا متوازی ہوتا

دوسرے سی تضیف ہوتا ہی

فرض کرو کہ بعید البصوی کے کسی نقطہ کی محدودین لادوہین (دفعہ ۲۴ شکل دیکھو)

پس بموجب دفعہ ۲۴ کی قطر مزدوج کے ایک طرف دے محدودین

اس سبب مساوات درج کے یہ ہے کہ

$$r - r' = \frac{r}{\cos \theta} - \frac{r'}{\cos \theta'} \quad (\text{لا - لا})$$

یعنی $r - r' = \frac{r}{\cos \theta} - \frac{r'}{\cos \theta'}$ (لا - لا)

اسی واسطے مع متوازی متعین الملاقات کا

اور بموجب دفعہ ۱۰ کے درج کے نقطہ وسط کے محدودین یہ ہیں

$$\frac{1}{2} (r + r') \quad \text{اور} \quad \frac{1}{2} (r + r') \quad (\text{لا} + \text{لا})$$

یعنی $\frac{r + r'}{2}$ اور $\frac{r + r'}{2}$ وسط

یہ محدودین مساوات کی شرائط کو پورا کرتی ہیں

$$r = \frac{r + r'}{2}$$

اسی واسطے متعین الملاقات $r = \frac{r + r'}{2}$ تضیف ع د کی کرتا ہی

اور چونکہ متوازی الاضلاع کے قطر ایک دوسرے کو نصف کرتے ہیں اور قطر متوازی الاضلاع کا ہر جس کے سرے اور سرے متصل کے اضلاع میں تو دوسرے قطر متنع الملاقات پر منطبق ہوتا ہے، یعنی مساوی جو نقاط اور دوسرے نکالے جائیں متنع الملاقات پر ملے ہیں

(۲۶۰) مساوات بعید البضوی کی جسکی محور اقطار مزدوج ہیں یہ ہے کہ

$$\frac{L}{P} - \frac{K}{P} = 1 \quad (۱)$$

تو مساواتیں متنع الملاقات کی بلحاظ ان محوروں کے یہ ہیں کہ

$$= \frac{L}{P} \text{ اور } = \frac{K}{P} \quad (۲)$$

اسوے کے دفعہ ۲۸ کی طرح ثابت کر سکتے ہیں کہ خطوط جو (۲) سی تعمیر ہوتی ہیں صرف یہ خطوط ہیں جو مرکز میں گزرتے ہیں اور (۱) سے ملے ہیں نہ اس کے قطر مزدوج سے اسے معلوم ہوا کہ خطوط متنع الملاقات بموجب دفعہ ۲۸ کے ہیں

اور یہی نتیجہ اسطرح حاصل ہو سکتا ہے کہ اصل مساوات بعید البضوی کی یہ ہے کہ

$$\frac{L}{P} - \frac{K}{P} = 1$$

اور مساوات دو متنع الملاقات کی یہ ہے کہ

$$\frac{L}{P} - \frac{K}{P} = 1$$

اگر لہذا اور کی قیمتیں نئی محدودین لگا دے اور ان کی رقموں میں کہیں اور زبر کو متغیر برسی اڑا دیں تو پہلی مساوات کی یہ صورت ہو جاگی

$$\frac{L}{P} - \frac{K}{P} = 1$$

اور انہیں قیمتوں کے رکھنے سے دوسری مساوات کی یہ صورت ہو جاگی

$$\frac{L}{P} - \frac{K}{P} = 1$$

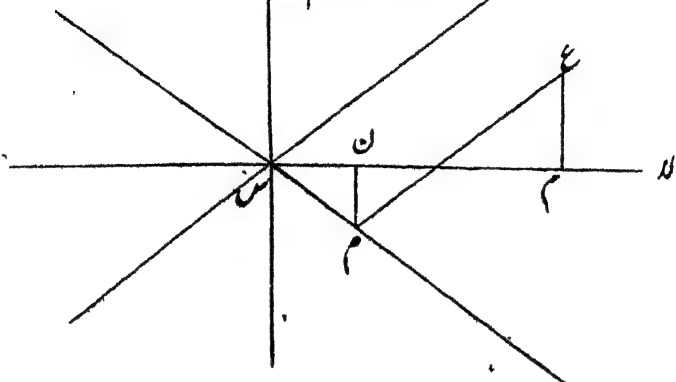
(۲۶۱) متنع الملاقات کو محور بنا کر مساوات بعید البضوی کی دریافت کرو

فرض کرو کہ س لہ اور س لہ اصل محور ہوں اور س لہ اور س لہ نئی محور لے لیں کہ س لہ اور س لہ مخالف جانبوں میں ہوں لہ کے اوپر کے ساتھ زاویہ صریحی ملے کہیں سے ص لہ اور لہ اور محدودین نقطہ کی بلحاظ قدیم محوروں کے اور لہ اور محدودین اسی نقطہ کے

لجائز جدید کھروں کے ہونے۔ ع۔ تم تنواری سے نکالو اور ع۔ م اور م۔ ن میں سے ہر تنواری

سے نکالو تو

$$\begin{aligned} \text{نہ} &= \text{م} = \text{س} = \text{ن} + \text{م} \\ \text{نہ} &= \text{م} = \text{س} = \text{ن} + \text{م} \\ \text{نہ} &= \text{م} = \text{س} = \text{ن} + \text{م} \end{aligned}$$



$$\text{پس } \text{ع} = \text{م} = (\text{نہ} - \text{نہ}) \text{ جب نہ}$$

$$\text{اور نیز جم نہ} = \frac{\text{ط}}{(\text{ط} + \text{ص})} \text{ اور جب نہ} = \frac{\text{ص}}{(\text{ط} + \text{ص})} \text{ ان قیمتوں کو مساوات میں رکھو}$$

$$\text{ط} - \text{نہ} = \text{ص} - \text{ط} = \text{ط} - \text{نہ}$$

$$\text{تو } \text{ط} (\text{نہ} - \text{نہ}) - \text{ط} (\text{نہ} + \text{نہ}) = \text{ط} (\text{نہ} - \text{نہ}) - \text{ط} (\text{ط} + \text{ص})$$

$$\text{یا } \text{نہ} = \frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{م}}$$

اور زبرہون کو ساقط کرو تو

$$\text{نہ} = \text{ط} + \text{ص}$$

بوجب دفعہ ۲۴۲ کے مساوات بعید البیضوی مزدوج پہلے محروک کے موافق یہ ہے

$$\text{نہ} = \text{ط} + \text{ص}$$

(۲۴۲) تمنع الملاقات کو محور قرار دیکر البیضوی کے مماس کی جو کسی نقطہ پر نکلا جائے مساوات دریافت کرو

فرض کرو کہ لہو کے محدب نقطہ کے ہوں

اور لہو کے محدب متصل کے نقطہ کے خط انحنی پر تو مساوات خط قاطع کی ان نقطوں پر یہ ہوگی کہ

$$\text{نہ} - \text{نہ} = \frac{\text{نہ}}{\text{نہ}} = (\text{نہ} - \text{نہ}) \quad (۱)$$

چونکہ (لڈو) اور (لڈو) بعید البضوی پر نقطے ہیں

$$لڈو = \frac{1}{2} (ط + ص)$$

$$لڈو = \frac{1}{2} (ط + ص)$$

اسے ثابت ہوا کہ مساوات (۱) بطور لکھی جاسکتی ہیں

$$ر - ز = \frac{لڈو}{لڈو} (لا - لا)$$

$$یا ر - ز = - \frac{لڈو}{لڈو} (لا - لا)$$

اب چونکہ حد غای کی حالت میں لڈو اسے معلوم ہوا کہ مساوات تاس کی نقاط (لڈو) پر ہیں

$$ر - ز = - \frac{لڈو}{لڈو} (لا - لا) \quad (۲)$$

یہ مساوات سیدی سادی بن سکتی ہے اگر لا میں ضرب دو تو

$$ر لا + لا ز = ۲ لڈو = ط + ص$$

(۲۴۳) ماس (لڈو) پر محور لاسی جہاں ملتا ہی اوس نقطہ کی دریافت کر نیکی لئے

ر - مساوات میں رکھو تو

$$ر لا + لا ز = ط + ص$$

$$یس لا = ط + ص = ۲ لڈو = ۲ لا$$

علیٰ بن الفقیس اوس نقطہ کے دریافت کر نیکی لئے جہاں محور کو ماس قطع کرتا ہی لا = مساوات

$$صیح کر تو ر = ط + ص = ۲ لڈو = ۲ لا$$

$$اوسط حاصل ضرب حصص درمیانی کا = ۲ لڈو = ط + ص$$

بعید البضوی کے کسی نقطہ سے ماس نکالا جائی اور اس ماس اور خطوط متنع الملاقات کی درمیانی جوشلت پیدا ہوگا اور سارے برابر ہوگا حاصل ضرب حصص درمیانی اور نصف جب زاویہ درمیانی

$$= \frac{1}{2} (ط + ص) \quad \text{جب } ر = ط + ص \quad \text{جب } ر = ط + ص$$

اور اس پر وہ مستقل ہے

چونکہ ماس (لڈو) محوروں لا اور ر کے حصص درمیانی ر لا اور ر کا قطع کرتا ہی تو حصہ ماس کا جو درمیانی خطوط متنع الملاقات کے آتا ہے نقطہ تاس پر تنصیف ہوتا ہے

ساوات قطبیہ
(۲۶۴) مساوات قطبیہ البیضوی کی دریافت کرو تا کہ قطب ہے
فرض کرو کہ $\overline{ع} = ی$ اور $\overline{ع} = ر$ (شکل دفعہ ۲۰۹ دیکھو)
تو $\overline{ع} = ی$ اور $\overline{ع} = ر$ موافق حدود کے

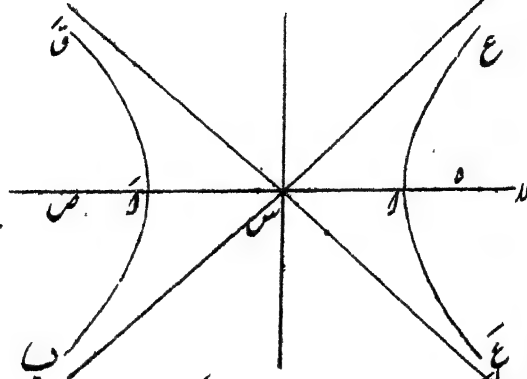
یعنی $\overline{ع} = ی$ (ط + ہ + م)
یا نق = ط (ی - ا) + ی نق جم رک - ر بموجب دفعہ (۲۲) کے
∴ نق (ا + ی جم ر) = ط (ی - ا)

اور نق = $\frac{ط (ی - ا)}{ا + ی جم ر}$ (۱)
اگر ہم زاویہ $\overline{ع}$ کو ر سے تعبیر کریں تو ہر کو جو پہلے حال ہوا تھا وہی حال ہوگا کہ
 $\overline{ع} = ی$ (ط + ہ + م)

پس ی = ط (ی - ا) + ی لی جم ر
اور ی = $\frac{ط (ی - ا)}{ا - ی جم ر}$ (۲)
ہم دفعہ ۲۱۸ کی شکل سے اس طرح ہی اس مساوات کو دریافت کر سکتے ہیں کہ
فرض کرو کہ $\overline{ع} = ی$ اور $\overline{ع} = ر$

تو $\overline{ع} = ی$ اور $\overline{ع} = ر$
یعنی $\overline{ع} = ی$ (ص م - ص ی)
یا نق = (ی نق جم ر - ط (ی - ا))
∴ نق (ی جم ر - ا) = ط (ی - ا)

اور نق = $\frac{ط (ی - ا)}{ی جم ر - ا}$
(۲۶۵) ان قطبی مساواتوں سے بعید البیضوی کشیدہ کو ترسم کرنا طالعہ ہون کے سطح پر ایک چھان
تمیلاً مساوات (۱) میں فرض کرو کہ $\overline{ع} = ی$ تو نق = ط (ی - ا) اب ہر جاہی کہ مقام
ہندہ ای بر طول برابر (ی - ا) کے قطب ہ سے ناپ لین تو اس سے نقطہ کو دریافت ہوگا



جیسے کہ صفر سی کے تک بڑھتی ہے تو ہم ساوات (۱) میں دیکھتے ہیں کہ نفی بڑھتا ہی اور جب ر
زیادہ کے سے ہوتا ہے تو جم زنی ہوتا ہی اور نفی برابر بڑھتا جاتا ہی
فرض کرو کہ وہ ایسا زاویہ ہو کہ $4 + ی جم = ی جم$ یعنی جم $= 4$ ۔ چ تو جتنا قریب قریب ہر کے
پہنچتا ہی اوتا ہی نفی بڑھتا ہی اور کہ وہ کے قریب قریب فرض کرنے سے ہم نفی کو جتنا چاہیں بڑھا
سکتے ہیں پس جب ر صفر سے وہ تک پہنچا تو خط منحنی کا وہ حصہ مرسم ہوتا جو اسے شروع ہوتا ہے
اور نقطہ ع میں گذرتا ہی اور نقطہ غیر سنہا ہی فاصلہ پر سید سے گذرتا ہی

جبکہ بڑا حصہ سے ہوتا ہی منفی ہوتا اور ابتدا میں وہ لائنات بڑا ہوتا ہی اور وہ گھٹتا جاتا ہی جبکہ
بڑا حصہ سے ک تک ہوتا ہی۔ چونکہ نفی منفی ہی تو ہم اس کو مثبت سمت کی مقابل سمت میں پیش
کر سکتی ہیں اور جب کہ زیادہ حصہ سے ک تک ہوتا ہی تو اسی خط منحنی وہ حصہ مرسم ہوتا ہی جو
ایک لائن تھا فاصلہ پر نقطہ شروع دائیں ہاتھ کی طرف نیچے کے ربع میں شروع ہوتا ہی اور نفی
سے ک تک گذرتا ہی۔ ساوات (۱) میں $ر = ک$ کے فرض کریں تو وہ دریافت ہو سکتا ہی

اور اس صورت میں نفی کی قیمت یہ ہو جاتی ہی کہ $ط (۱ + ی) = ط (۱ + ی) = ط (۱ + ی)$
چونکہ زیادہ ہوتا ہی ک سے ک۔ حصہ تک تو نفی منفی ہوتا ہی اور باعتبار تعدد کی زیادہ ہوتا
اور ر قریب قریب ک۔ حصہ کے فرض کر کے ہم نفی کو جتنا چاہیں بڑھا سکتے ہیں۔ پس ط (۱ + ی)
خط منحنی کے وہ فرع مرسم ہوگی جو اسے شروع ہوتی ہے اور نفی پر لائن تھا فاصلہ پر گذرتی ہی

چونکہ ترزاوہ ۲ نق۔ حصہ سے ایک تک ہوتا ہے تو یہی نسبت ہوتا ہے اور اول لائنیاں ہوتی ہیں اور یہ کم ہوتا ہے ہا ہی سطح خط منحنی کا وہ حصہ مرسم ہوتا ہے کہ نقطہ سے لائنیاں فاصلہ سے شروع ہوتا ہے اور لکڑی بائیں طرف نیچے کے حصہ میں واقع ہے اور ع اور ل پر گزرتا ہے خطوط متعلقہ الملاقات سے کی اور س کی محور متقاطع پر اوس زاویہ پر میل کرتے ہیں کہ جس کا ما

ص ۱۶ ہے اسے معلوم ہوا کہ جسم ل س ل = $\frac{ط}{ط+ص}$ = $\frac{ل}{ل+ص}$ اور جسم ل س ل = $\frac{ل}{ل+ص}$ یعنی ل س ل = حصہ پس اس طرح جب ر قریب قیمت حصہ کے ہوتا ہے تو نصف قطر دائرہ اوس مقام قریب ہوتا ہے جو متوازی س ل کا ہے۔ اور علیٰ ہذا القیاس جب ر قریب قیمت ایک۔ حصہ پہنچتا ہے تو نصف قطر دائرہ اوس مقام کے نزدیک ہوتا ہے جو متوازی س ل کا ہے

(۱۶۶) جس طرح دفعہ ۲۰ میں ثابت ہوا ہے یہاں بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ قطبی مساوات کسی قدر کی جس کے محاذی زاویہ ۲ ب ماسکہ پر واقع ہو یہ ہے کہ نق = $\frac{ل}{ل+ص}$ + $\frac{ط}{ط+ص}$ (حصہ - ر) ہ - ب اور ہ + ب متحرک زاویے اون خطوں کے ہیں جو ماسکہ اور وتر کے انجناحون میں ملائی جائیں اور ل نصف عرض مستقیم ہے پس ثابت ہوا کہ مساوات قطبی ماس کے یہ ہے کہ

نق = $\frac{ل}{ل+ص}$ + $\frac{ط}{ط+ص}$ (حصہ - ر) (۲۶۷) جب مرکز بعید البیضوی کا قطب ہو تو اوسکی مساوات بوجہ دفعہ ۲۰۶ کے یہ ہے کہ نق = $\frac{ل}{ل+ص}$ (حصہ - ر) = $\frac{ط}{ط+ص}$

دفعات ۲۰۷ اور ۲۰۸ بعید البیضوی کی حق میں بھی درست ہیں

متساوی الاضلاع یا قائم الزاویہ بعید البیضوی

(۲۶۸) اگر بیضوی کی اس مساوات ط ل + ص ل = ط ل + ص ل میں ہم فرض کریں کہ ط = ص تو ہکو یہ حاصل ہوگا کہ ل = ط اور یہ مساوات دائرہ کی ہی پس دائرہ کو ایک خاص صورت بیضوی خیال کر سکتے ہیں اگر بعید البیضوی کی اس مساوات ط ل + ص ل = ط ل + ص ل میں ہم

فرض کریں کہ $\Delta =$ ص تو ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ $\Delta =$ لڈ۔۔۔ ط۔۔۔ پس ہے ایک بعید البیضوی حاصل ہوگی جسکو متساوی الاضلاع بنیت محرد کے مساوی ہونے کہتے ہیں۔ اور چونکہ $\Delta =$ ط کے ہونے سے زاویہ درمیان خطوط متنع الملاقات کا جو $=$ مس Δ زاویہ قائم ہوتا ہی اسلئے

متساوی الاضلاع بعید البیضوی کو قائم الزاویہ بعید البیضوی بھی کہتی ہیں قائم الزاویہ بعید البیضوی کی ذات کی ساتھ جو باتیں مخصوص ہیں وہ معمولی بعید البیضوی میں $\Delta =$ ص فرض کرنے سے استنباط ہو سکتی ہیں مثالی اوسکی ذیل میں موجود ہیں

چونکہ $\Delta =$ ط (ی ۱) سے ہو کر حاصل ہوتا ہے کہ $1 = 0.1 = 1 = 2$ مساوات ماس کی دفعہ ۲۲۰ میں

لڈ۔۔۔ لڈ۔۔۔ $\Delta =$ ط

دفعہ ۲۲۰ سے $\Delta =$ ط $\Delta =$ ط $\Delta =$ ط

موجب دفعہ ۲۲۲ کے مساوات بعید البیضوی مزدوج کی

اسے معلوم ہوا کہ بعید البیضوی مزدوج کی وہی کیفیت ہی جو اصلی بعید البیضوی کی سی گو وہ مختلف ہوں پر واقع ہو موجب دفعہ ۲۲۸ کے $\Delta =$ ط $\Delta =$ ط $\Delta =$ ط اور اس واسطے موجب دفعہ ۲۵۹ کی $\Delta =$ ط اور س دیکھان یسلان خطوط متنع الملاقات سے کہتی ہیں

مثالیں

(۱) دائرہ جو بعید البیضوی کو اور متنع الملاقات کو مس کرتا ہی اوسکا نصف قطر برابر ہوتا ہے

عرض مستقیم کے اوس حصہ کے جو درمیان خط منحنی اور متنع الملاقات کے واقع ہی

(۲) بعید البیضوی کی دور اسون میں سے کسی کے ایک خط کھینچا جا اور وہ اون دونوں پر

ختم ہو جو دوسری راس متوازی خطوط متنع الملاقات کے کچے جائیں تو وہ خط اوس نقطہ پر

تقسیم ہوگا جہاں وہ بعید البیضوی سی قطع ہوتا ہی

(۳) اگر بعید البیضوی کے کسی ناسکے سے ایک خط مستقیم کھینچا جا تو حصہ جو اس خط منحنی اور متنع

کے واقع ہو برابر ہوگا $\Delta =$ ط $\Delta =$ ط $\Delta =$ ط جہاں راوردہ راوتی ہیں جو وہ خط مستقیم اور متنع

محور کے ساتھ بنائے ہیں (۴) دائرہ کے قطرب پر جتنے وتر ایک ہی زاویہ پر میل کر رہی ہیں ان میں سے ایک وتر ق
ارے اور ب ق کے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

(۵) بعید البیضوی کے ایک فرع میں نقطہ ع ہی اور ع ایک نقطہ بعید البیضوی مزدوج کی اور ع
س ع اور س ع نصف اقطار مزدوج ہیں۔ اگر ص اور ص ماسکہ اندرونی دونوں فرعوں کے
ہوں تو ثبات کرو کہ ص ع اور ص ع کا تفاوت برابر ہوگا اس اور س کے تفاوت کی
(۶) اگر ل د و محدود بعید البیضوی کے کسی نقطہ کی ہوں تو ثبات کرو کہ ہم یہ فرض کر سکتی ہیں کہ
ل د = ط قطر اور د = ص ص سر

(۷) بعید البیضوی کے ایک = ایک کے محور کا متوازی خط کھینچا جائے اور وہ بعید البیضوی سے اور
اوس کے مزدوج سے تقاطع اور ق پر تو ثبات کرو کہ دستور تقاطع اور ق ایک دوسرے کو محور ل د پر
تقاطع کرے اور یہ بھی ثابت کرو کہ ماس نقاط ع اور ق کے خط منحنی پر تقاطع کرتی ہیں جسکی مساوات
یہ ہے کہ $\frac{ط}{ص} = \frac{ط}{ص}$ (۸) بعید البیضوی کے ایک نقطہ سے اصل بعید البیضوی کے ماس کھینچے گئے ہیں تو ثبات کرو کہ
وتر تاس دوسرے فرع بعید البیضوی کو س کرے گا

ساوا تین نصف قطروں کی ہی دریافت کرو جو دو نما سوں کے نقاط تاس کے مرکز بننے سے بنیں اور
اگر نصف قطر عمود ایک دوسرے پر ہوں تو ثبات کرو کہ محدود نقطہ کے جسے ماس کھینچ گئی ہیں
یہ ہوں گے $\frac{ط}{ص} = \frac{ط}{ص}$ و $\frac{ط}{ص} = \frac{ط}{ص}$

(۹) قریب البیضوی کے دو ماس نکالے ہیں ان کی درمیان کا زاویہ ہرے تو ثبات کرو کہ اوپر کے
نقاط تقاطع کا مقام النقاط بعید البیضوی ہی جسکا ماسکہ اور خط منظم ہی ہیں جو بعید البیضوی کی
(۱۰) تباؤ باب دہم کے بیسویں مثال کہاں تک بعید البیضوی کے باب میں ٹھیک ہے

(۱۱) قطر بعید البیضوی کے جو زاویہ خطوط متنع الملاقات سے باقی ہیں ان کی جیسوں میں
نسبت ہوتی ہے جو ان زاویوں کے جیسوں میں ہوتی ہیں جو قطر مزدوج بنائے ہیں

درجہ دوم کی مساوات

۱۹۵

باب سیم فریم کے دو قطر درجہ دوم خط ملحق الما قات ایک فرج بعید البضوی مرفوع کی جتنے ہیں
(۱۲) بضوی کے دو قطر اگر ایک بعید البضوی ہوگی کو س کرتی ہے تو دوسری ایسی کو س کرگی اور یہ بی ثابت
کرو کہ اطار جو نقاط تاس سے کچھ جائیں مرفوع ایک دوسرے ہونگے

باب سیم فریم

(۲۶۵) اب ہم ثابت کریں گے کہ ہر مقام الما قات جو مساوات درجہ دوم ہے قیہ ہوتا ہے وہ انیس سے ایک ہوگا
جسکا ذکر ہم نے اب تک کیا ہے یعنی ایک خط ستقیم یا دو خطوط ستقیم یا ایک دائرہ یا ایک قریب البضوی
یا ایک بضوی یا ایک بعید البضوی

مساوات درجہ دوم کی صورت عامہ اس طرح لکھی جاسکتی ہے

ط لا + ص لا + س لا + د لا + ی + ر + ف = ۰
ہم محور کو قائم الزاویہ فرض کرتے ہیں اور اگر محور محور ہوں تو ہم کو قائم الزاویہ محور کی طرف تحویل
اور چونکہ مستقیم کی تحویل سے مساوات کے درجہ میں بوجہ دفعہ ۸ کے فرق نہیں آتا اسلئے
تحویل ہونے کے بعد یہی وہی صورت ہوگی جو اوپر مذکور ہوئی
اگر خط منحنی تبدیل ہو کر گذرنا ہی تو ف = ۰ اور اگر تبدیل ہو کر نہیں گذرنا تو ف = ۰ کی نہیں ہوتا اسلئے

ف پر تقسیم کرنے سے ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ط لا} + \text{ص لا} + \text{س لا} + \text{د لا} + \text{ی} + \text{ر} + \text{ف} = ۰$$

(۲۶۰) اول ہم ثابت کرتے ہیں کہ مساوات سے اول قیوتوں کا دور ہونا جنہیں اول قوت مقادیر
متغیر کی ملحق ہیں ممکن ہے اصل محدود کو نقطہ (ح وق) پر ان قیوتوں کے مندرجہ کرنے سے پہلے
کر سکتی ہیں کہ

$$\text{لا} = \text{لا} + \text{ح} \text{ اور } \text{د} = \text{د} + \text{ق}$$

اور ان قیوتوں کو لا اور د کی جگہ اس مساوات میں رکھو

$$\text{ط لا} + \text{ص لا} + \text{س لا} + \text{د لا} + \text{ی} + \text{ر} + \text{ف} = ۰$$

تو ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ط لا} + \text{ص لا} + \text{د لا} + \text{س لا} + \text{ق} + \text{ح} + \text{ی} + \text{ر} + \text{ف} = ۰ \quad (۲)$$

$$\text{ح میں ف} = \text{ط لا} + \text{ص لا} + \text{ق} + \text{س لا} + \text{ح} + \text{ی} + \text{ق} + \text{ف} \quad (۳)$$

اب اگر ممکن ہو تو ح اور ق کی ایسی قیمتیں فرض کرو جسے کہ لا اور د کی قیمتیں فنا ہو جائیں
یعنی یہ فرض کریں کہ $\text{ط لا} + \text{ص لا} + \text{ق} + \text{د} = ۰$ اور $\text{س لا} + \text{ق} + \text{ح} + \text{ی} = ۰$

پس $ج = ۲$ د - ص $ی$ اور $ق = ۲$ ط $ی$ - ص $د$
 اس طرح یہ ممکن ہوگا کہ $ج$ اور $ق$ کی مناسب قیمتیں متعین کی جائیں بشرطیکہ $ص = ۲$ ط $س$ برابر صفر کے
 اب ہم یہ لکھیں گے کہ مقام النقطہ جو درجہ دوم کی مساوات عامہ سے تعبیر ہوتی ہیں اولیٰ دو قسمیں ہیں
 ایک وہ جو مرکز ہستی ہیں اور دوسری وہ جو مرکز نہیں ہستی پہلی صورت میں $ص = ۲$ ط $س$ صفر نہیں ہوگا
 اور دوسری صورت میں $ص = ۲$ ط $س$ صفر ہوگا۔ اب ہم اولیٰ صورت کہتے ہیں جس میں $ص = ۲$ ط $س$
 برابر صفر کے نہیں ہے اور اسی سبب قیمتیں $ج$ اور $ق$ جو اوپر دریافت ہوئی ہیں محدود ہوں گی اور
 مساوات (۲) یہ ہو جائیگی کہ

$$ط لاء ص لاء س د + ق = (۴)$$

اب اگر اس مساوات کی مقدار متغیر کی لدا اور کم قیمتوں کے شرائط پوری ہوتی ہیں تو۔ لدا اور کم
 قیمتوں کے شرائط پوری ہوں گے اس سے معلوم ہوا کہ سبب بعدید محدودین کا مرکز مقام النقطہ
 کا ہی جو (۱) سے تعبیر ہوتا ہے اس لیے ثابت ہوا کہ اگر $ص = ۲$ ط $س$ برابر صفر کے نہ ہو تو مقام
 (۱) سے تعبیر کیا گیا ایک مرکز رکھتا ہے اور اس کے محدودین $ج$ اور $ق$ میں جنکی قیمتیں اور مرکز ہوتی ہیں
 قیمت $ق$ کی مساوات (۳) میں $ج$ اور $ق$ کی قیمتوں کے رکھنے سے دریافت ہو جائیگی
 اس طرح آسان ہو سکتا ہے

$$۲ ط ج + ص ق + د = ۰$$

$$۲ س ق + ص ج + ی = ۰$$

ان مساواتوں میں سے اولیٰ مساوات کو $ح$ میں اور دوسری کو $ق$ میں ضرب دو اور جمع کر دو تو

$$۲ ط ج + ۲ س ق + ۲ ص ج ق + د ج + ی ق = ۰$$

$$۲ ط ج - د ج - ی ق - ۲ ق = ۰$$

$$۲ ق = ۲ ط ج + د ج + ی ق$$

$$= ۲ ق + س د لاء ی - ص ی د$$

$$ص - ۲ ط س$$

ہم اختصار کے واسطے $ق$ ہی لکھتے ہیں
 (۲) دفعہ گذشتہ کی مساوات (۴) سے ہم برابر کر اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ
 اس مساوات کو موجودہ دفعہ ۱ کی محدودین کی قیمتیں بدل کر زیادہ سادہ صورت کا بنا سکتے ہیں

$$ط لاء ص لاء س د + ق = ۰$$

لا = ل + ج + ر - ج + ر

ر = لا + ج + ر + ج + ر

اور مساوات (۵) میں قیمت کر کے

لا (ط + ج + ر + س + ج + ر) + ج + ر

+ ج (ط + ج + ر + س + ج + ر) + ج + ر

اشغال لا کے برابر صفر کے فرض کرو تو

۲ (س - ط) ج + ر + ج (س - ط) ج + ر = ۰

یا (س - ط) ج + ر + ج (س - ط) ج + ر = ۰

چونکہ ر کی قیمت اسے دریافت ہو سکتی ہے کہ مساوات (۷) کی شرائط کو پورا کرے تو رقم جسمین ملے گی مساوات (۶) سے ہمیشہ ساقط ہو سکتی ہے اس لئے مساوات کی یہ صورت ہو جائے گی کہ

لا (ط + ج + ر + س + ج + ر) + ج + ر

+ ج (ط + ج + ر + س + ج + ر) + ج + ر = ۰

یا لا + ب + ج + ر + س + ج + ر = ۰

جسمین ۱ = ۱ (ط + س) + ۲ (س - ط) ج + ر + ج (س - ط) ج + ر

ب = ۱ (ط + س) - ۲ (س - ط) ج + ر - ج (س - ط) ج + ر

چونکہ س ۲ = ط - ص

ج ۲ = ۱ (ط - س) + ۲ (س - ط) ج + ر + ج (س - ط) ج + ر

اوج ۲ = ۱ (ط - س) + ۲ (س - ط) ج + ر + ج (س - ط) ج + ر

اسے معلوم ہوا کہ ۱ = ۱ (ط + س) + ۲ (س - ط) ج + ر + ج (س - ط) ج + ر

ب = ۱ (ط + س) - ۲ (س - ط) ج + ر - ج (س - ط) ج + ر

مساوات (۸) میں مقادیر متغیر پر سے زبواڑ اسکے ہیں اور اس طرح لکھتے ہیں کہ

۱ - لا - ج - ر = ۱

(۱) اگر لا اور ب اور ج کی ایک ہی علامت ہو تو مقام النقاط اوسکا نام لگن ہے

(۲) اگر لا اور ب کی ایک ہی علامت ہو اور ج کی علامت اوسکے خلاف ہو تو مقام النقاط

بیضوی ہے جسکے نصف محور یہ ہیں

۱ - لا - ج - ر اور ۱ - ج - ر موجب دفعہ ۱۶۰ کے

اور مقامات کے واسطے ہوگا اگر $a = b$

(۲۱) اور a اور b کی مختلف علامتیں ہوں تو مقامات کے تقاطع بیضوی ہوگا جو جب دفعہ ۲۱ کے مطابق ہوگا تو a اور b کی مختلف علامتیں ہوں گی۔ کی نہیں اگر $a = b$ اور a اور b کی ایک ہی علامت ہوگی

اگر $a = b$ اور a اور b کی مختلف علامتیں ہوں تو مقامات دو خط مستقیم ہوں گی جنکی مساواتیں یہ ہوں گی

$$a = b \quad \text{اور} \quad a = -b$$

اور a اور b کے قیمتوں کے ہم دیکھتی ہوں گی

$$a = b \quad \text{اور} \quad a = -b$$

اسے معلوم ہوگا کہ a اور b کی ایک ہی علامت ہوگی اگر $a = b$ اور a اور b کی مختلف علامتیں ہوں گی

اگر $a = b$ اور a اور b کی مختلف علامتیں ہوں گی

(۲۲) اس باب کے ساری دفعات کا خلاصہ یہ ہے کہ مساوات

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ایک بیضوی کو تعبیر کرتی ہے اگر $a = b$ اور a اور b کی مختلف علامتیں ہوں گی تو مقامات کے تقاطع بیضوی ہوگا جو جب دفعہ ۲۱ کے مطابق ہوگا تو a اور b کی مختلف علامتیں ہوں گی۔ کی نہیں اگر $a = b$ اور a اور b کی ایک ہی علامت ہوگی

(۲۳) مساوات دفعہ ۲۳ کے باب میں ہم لکھتے ہیں

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ایک قیمت a کی ہو جسے شرائط مساوات کی پوری ہوتی ہو تو ضروری ہے کہ $a = b$ اور a اور b کی مختلف علامتیں ہوں گی۔ کی نہیں اگر $a = b$ اور a اور b کی ایک ہی علامت ہوگی

اسلئے کہ سب قیمتیں a کی اس جگہ پر ہیں کہ $a = b$ اور a اور b کی مختلف علامتیں ہوں گی۔ کی نہیں اگر $a = b$ اور a اور b کی ایک ہی علامت ہوگی

سلسلہ زاویوں کا دریافت ہوگا جنہیں تفاوت ہے بقدر انصاف کے کے ہوگا اور ان کی مختلف قیمتیں یہ ہیں کہ $a = b$ اور a اور b کی مختلف علامتیں ہوں گی۔ کی نہیں اگر $a = b$ اور a اور b کی ایک ہی علامت ہوگی

اس کے تقاضے یہ ہو گا اور دوسری صورت میں اس کا بالکل عکس ثابت اور منفی سمتیں محوروں کی تبدیلی سے
دفعہ ۱۷ میں حجم ۲ اور جب ۲ کی جذر کی علامت ہر ایک ہو سکتی ہے لیکن علامت دونوں میں
ایک ہونی چاہئے تاکہ یہ تباہ نہ ہو ۲ = ص ۱ میں درست رہے
(۱۷) دفعہ ۱۷ کی ابتدا میں ہم جو لکھ آہی ہیں اس کے موافق زاویہ پر محوروں کے ملنے سے مساوات

$$ط + ص + ل + س + د + ف = ۰$$

$$ط + ل + ص + د + ف = ۰$$

$$جسمین ط = \frac{1}{2} [(ط + س) + (ط - س) + (ط + ص) + (ط - ص)]$$

$$ص = (ط - س) + (ط - ص) + (ط + ص) + (ط - ص)$$

$$س = \frac{1}{2} [(ط + س) - (ط - س) + (ط + ص) - (ط - ص)]$$

$$اسے معلوم ہوا کہ ط + س = ط + س اور$$

$$ص - س = ط - س = [(ط - س) + (ط - ص) + (ط + ص) + (ط - ص)]$$

$$- (ط + س) + (ط - س) + (ط + ص) + (ط - ص)$$

$$= (ط - س) + (ط - ص) - (ط + ص)$$

$$ص - س = ط - س$$

اسے معلوم ہوا کہ جملہ ص - س ط س کی وہی قیمت ہی خواہ تو وہ مساوات عام درجہ دوم کی مثال سے
پہلے یا پیچھے بنے جب محور بدل گئے ہیں

اور یہی کیفیت ط + س کی ہے

اسے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر خط منحنی تعبیر کیا گیا مساوات

$$ط + ل + ص + ل + س + د + ف = ۰$$

$$ط + س = ۰$$

تو یہی ہی ارتباط رہیگا اسے جو کہ ہم نے اوپر بیان کیا وہ سب صورتوں پر جاری ہی خواہ محور کی تبدیلی ہو

(۱۷) اب ہم دوسری صورت پر متوجہ ہوتے ہیں جسمین

$$ص - س = ط - س$$

اب ہم دفعہ ۱۷ کی طرح اون ارقام کو جسمین متغیر یعنی اول قوت ط ف ہوں ساقط

نہیں کر سکتے لیکن ہم محوروں کی سمت بدل کر مساوات کو دفعہ ۱۷ میں سادہ بنا سکتے ہیں

فرض کرو کہ مساوات

$$ط + ل + ص + ل + س + د + ف = ۰$$

(۱) میں

$$\text{لا} = \text{لا} + \text{حم} - \text{ز}$$

$$\text{ر} = \text{لا} + \text{جبار} + \text{ز} - \text{حم}$$

کیونکہ یہ حاصل ہوگا کہ لا (ط + حم + ر + س جب ر + ص جب ر + حم ر)

$$+ \text{لا} (\text{ط} + \text{جبار} + \text{ز} - \text{حم} + \text{ر} - \text{ص جب ر} + \text{حم ر})$$

$$+ \text{لا} (\text{دحم} + \text{ی} + \text{ح} + \text{ر}) + \text{ز} (\text{ی} + \text{حم} - \text{ز} - \text{دح} + \text{ن}) + \text{ن} = (۲)$$

اب فرض کرو کہ س ۲ = ص
تو مساوات (۲) میں اشال لا کو کی فنا ہوتی ہے اور موافق دفعہ ۱۲ کے اشال لا اور ز کی بھیج

ان شاملوں میں ایک ضرور فنا ہونا چاہی کیونکہ اونکا حاصل ص ۲ ط س - ص ۱ ہو جب فرض ہے۔

فرض کرو کہ اشال لا = ۰ مساوات (۲) میں متغیر پر سے زبر کو اڑا کر

$$\text{س} + \text{ز} + \text{دلا} + \text{ی} + \text{ن} = ۰ \quad (۳)$$

اگر د = ۰ کے نہ ہو تو وہ اس طرح بھی لکھی جاتی ہے

$$\text{س} (\text{س} + \text{ز} + \text{ن}) = - \text{د} (\text{لا} - \text{ن} + \text{س} + \text{ز})$$

پس موجب دفعہ ۱۲ کے مقام النقاط قریب البضوی ہے

اگر د = ۰ تو مساوات (۳) دو خطوط متوازیہ کو تعبیر کر لگی

اگر آٹھ ۴ س ۵ سے ہی یا ایک خط مستقیم کو اگر ۱ برابر ۴ س ۵ سے ہی

یا ایک نامکن مقام النقاط ہوگا اگر ۱ چھوٹا ۴ س ۵ سے ہی

اسے ثابت ہو کہ جو - ۴ ط س = ۰ تو مساوات

$$\text{ط لا} + \text{ص لا} + \text{س} + \text{ز} + \text{دلا} + \text{ی} + \text{ن} = ۰$$

قریب البضوی کو تعبیر کرتی ہے لیکن اس میں تین صورتیں مستثنیٰ ہیں ایک وہ جس میں دو خطوط متوازیہ کو تعبیر

یا ایک خط مستقیم کو یا ایک نامکن مقام النقاط کو

دفعہ ۱۲ میں جو نتائج بیان ہو ہیں ان کو اور اس نتیجہ کو ملا کر دیکھیں تو یہ معلوم ہوگا کہ مساوات عام

درجہ دوم کا بیان تمام و کمال ہو گیا

(۱۴۶) دفعہ ۲۰ میں ہے ثابت کیا ہے کہ جب ص - ۴ ط س = ۰ کی نہیں ہے تو مساوات عام

دوم کی ایک مرکزی خط منحنی کو تعبیر کرتی ہے اب ہم ثابت کرینگے کہ جب ص - ۴ ط س = ۰ کے ہو

تو خط منحنی کامرکز نہیں ہوگا الا اس صورت میں کہ وہ دو خطوط مستقیم متوازیہ کو تعبیر کر لگی

اگر ایک خط منحنی درجہ دوم کا مبدی محدود مرکز اوسکا ہو تو کوئی رقم جمید اول قوت کسی تھا دیر غیر کی اضافہ ہوا زمین پر اس
اسو اسطی کہ اگر یہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ مبدی محدود مرکز اس خط منحنی کا ہی کہ

(۱) $\text{ط لا} + \text{ص لا} + \text{س} + \text{د} + \text{د لا} + \text{ی} + \text{ف} = ۰$

اب فرض کرو کہ لا اور د محدود ہیں نقطہ خط منحنی کے ہیں اسیو طے - لا اور - ی اور س
نقطہ خط منحنی کے محدود ہیں ہونگے ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں رکھو تو

$\text{ط لا} + \text{ص لا} + \text{س} + \text{د} + \text{د لا} + \text{ی} + \text{ف} = ۰$

$\text{ط لا} + \text{ص لا} + \text{س} + \text{د} + \text{د لا} - \text{ی} + \text{ف} = ۰$

اسیو اسطے تفریق کرنے سے ۲ (د لا + ی کم) = ۰ (۲)

اب اگر داوری دو قوت نہ ہوں تو مساوات (۲) جب درست ہوگی کہ لا اور د اس خط پر
جس کی مساوات یہ ہے کہ لا + ی = ۰

لیکن مرکز خط منحنی کا وہ نقطہ ہی جو ہر قوت کی کہ او میں گذرتا تھی ضیف کرتا ہی ہے معلوم ہوا کہ
مبدی محدود مرکز خط منحنی (۱) کا نہیں ہو سکتا جب تک کہ داوری فنا نہ ہوتی ہوں
(۲۷۷) فرض کرو کہ یہ مساوات ہے

(۱) $\text{ط لا} + \text{ص لا} + \text{س} + \text{د} + \text{د لا} + \text{ی} + \text{ف} = ۰$

جمید ص - ۴ ط س = ۰ یہاں ط اور س دو نوصف نہیں ہو سکتے اسو اسطے کہ جب یہ ہر مرکز ہو
تو ص ہی صفر ہو جائیگا تو مساوات (۱) درجہ دوم کی نہیں رہیگی ہم فرض کریں گے کہ ط برابر صفر کی ہوتی
اب اگر خط مساوات (۱) سے تعبیر کیا گیا مرکز کہتا ہو اور اس مرکز کو مبدی محدود مرکز فرض کریں
تو ارقام جمید اول قوت لا اور د کی طرف ہر دو دفعہ ۲ کے فنا ہونی چاہیے - لیکن
دفعات ۲۰ اور ۲۴ سے نتیجہ نکلتا ہی کہ ص - ۴ ط س = ۰ اکثر ہم ان رقموں کو
مبدی یا محور و نکود کہ فنا نہیں کر سکتی - صرف ایک صورت متشبی ہی جمید دفعہ ۲۰
میں ح اور ق کی قیمتوں میں شمار کنندہ فنا ہو جاتا ہی او وقت قیمتیں ح اور ق کے
تبعین بر جاتی ہیں اور دو مساواتیں جو ان کی قیمتوں کی دریافت کریں گے واسطے ہیں
وہ ایک ہو جاتی ہیں جو مقابلہ کی باب یا زہم کو دیکھو پس یہ کہ یہ حال ہو گا کہ

ایٹائی - صد = بیسی = چھٹا پس ہے ثابت ہوا کہ اس اور علی

تسمیہ کے رکھنے میں اس بات (۱) یہ ہو جائیگی کہ

[illegible]

(٢) يعني ط (لد + ص^٢ / ط^٢) + د (لد + ص^٢ / ط^٢) + ف = .

مسافات (۲) سے دو قیمتیں لے + $\frac{ص}{ح}$ کی دریافت ہو گئیں ہر اگر یہ قیمتیں ممکن ہیں تو میں تمام نقاط دو خطوط متوازیہ ہو گئی۔ اس صورت میں ہر نقطہ اوس خط میں کہ ان خطوط متوازیہ

کے ایک خط کا متوازی ہوٹیک وسط میں واقع ہو وہ اس کا مرکز ہوگا

دفعہ ۴ کی ابتدا میں جو غلطی بیان کیا گیا ہے وہ ثابت ہی

(۲۷۸) دفعہ ۴۷ میں حواہ تبادلات بیان کے ضمن اور انکی متشابہ ارتباطات حاصل ہو سکتی ہیں

اگر محمد مدین کے محرف ہوں اسوئے کے فرض کرو مساوات

ط ل ل + ص ل ل + س ك + ف = ۰

ط ل لا ص لا م + س + ک + ف =

بجائز قائم الزاویہ محصور ہے اب فرض کرو کہ یہ محصور بدلتا کر محض محور بن جائے جس کے درمیان زاویہ دیا اور ایک اور بات یہ زیادہ فرض کرو کہ محور لا کائیرا نے محور لائرنسٹیک ہے تو مجموعہ قطعہ ۸ کی

لله = لا + بركہ اور = رکھو

ان قیمتوں کو اوپر کی مساوات میں رکھیں تو یہ حاصل ہوگا کہ

ط ل ل + ص ل ل + س ن ا + ف = خمین

$$b = \bar{b}$$

ص = ط گم + ص ص د

س = طحم + صاج دحم +

طس = (ص + طس) ح د

سے۔ ص جم د = (ط + س) جبار

$$\frac{1}{\text{مستطیل}} = \frac{\text{مستطیل}}{\text{مستطیل}} = \frac{\text{مستطیل}}{\text{مستطیل}}$$

۱۰۰ - ص ۱۰۰ = ط + س

پس دفعہ ۴۴ کی استخانت سی ثابت کر سکتے ہیں کہ خواہ محرق قائم الازویہ ہوں خواہ غرق قائم الازویہ

ص ۱ - ۵ ط ۱ - ۵ اور ط ۱ - ۵ ص ۱ - ۵

..

میں کچھ تبدیلی نہیں ہوتا گو محور بدل جائیں

(۲۹) اب ہم لکھتے ہیں کہ مساوات درجہ دوم کے سطح خط منحنی کا نیچر دین کی صورت بدلے کے مساوی کر سکتے ہیں اور محوروں کو خواہ قائم الزاویہ فرض کریں خواہ غیر قائم الزاویہ۔ فرض کرو مساوات

$$ط لاء + ص لاء + س ر + د لاء + ی ر + ف = ۰$$

مساوات کو لحاظ رکھے حل کرو تو

$$د = - \frac{ص لاء ی}{س لاء ی} \pm \frac{۱}{س لاء ی} [(ص لاء ی) - س لاء ی (ط لاء + د لاء + ف)]$$

$$= - \frac{ص لاء ی}{س لاء ی} \pm \frac{۱}{س لاء ی} [(ص لاء ی) - س لاء ی (ط لاء + د لاء + ف)]$$

$$= \frac{ص لاء ی}{س لاء ی} \pm \frac{۱}{س لاء ی} [(ص لاء ی) - س لاء ی (ط لاء + د لاء + ف)]$$

جسمیج = - $\frac{ص لاء ی}{س لاء ی}$ اور ب = - $\frac{ی}{س لاء ی}$

$$ع = \frac{ص لاء ی - س لاء ی}{س لاء ی} = \frac{ص لاء ی - س لاء ی}{س لاء ی}$$

اول فرض کرو کہ ص = ۲ ط منحنی ہے اور اوس میں بجا ص = ۲ ط کے۔ اور کہو

تو مساوات (۳) کی یہ صورت ہوگی کہ

$$د = \frac{ص لاء ی}{س لاء ی} \pm \frac{۱}{س لاء ی} [(ص لاء ی) - س لاء ی (ط لاء + د لاء + ف)]$$

$$اب لاء + س ر + د لاء + ق = (لاء + ع) (۲ + ق + ع)$$

بس اگر ق = ع ثابت ہو تو مقدار علامت جذر کی اندر منفی ہوگا اور مقام النقطہ نامکمل ہوگا

اگر ق = ع = ۰ تو مقام النقطہ ایک نقطہ ہوگا جو

$$لاء = ع اور د = \frac{ص لاء ی}{س لاء ی} \pm \frac{۱}{س لاء ی} [(ص لاء ی) - س لاء ی (ط لاء + د لاء + ف)]$$

اگر ق = ع منفی ہو تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ

$$(لاء + ع + ق - ع) = (لاء + ع + ق - ع) [(لاء + ع + ق - ع) - (لاء + ع + ق - ع)]$$

$$= (لاء - بر) (لاء - شر) فرض کرو$$

تو مساوات (۴) سطح لگبی جائیگی کہ

$$د = \frac{ص لاء ی}{س لاء ی} \pm \frac{۱}{س لاء ی} [(ص لاء ی) - س لاء ی (ط لاء + د لاء + ف)]$$

چونکہ (لاء - بر) (لاء - شر) مثبت ہی لاء اوس صورت میں کہ لاء درمیان بر اور شر واقع ہو تو قیمتیں کی

مساوات (۵) میں صلی ہوئیں جب تک کہ لاء درمیان بر اور شر کے واقع ہو۔ سوا ازیں د

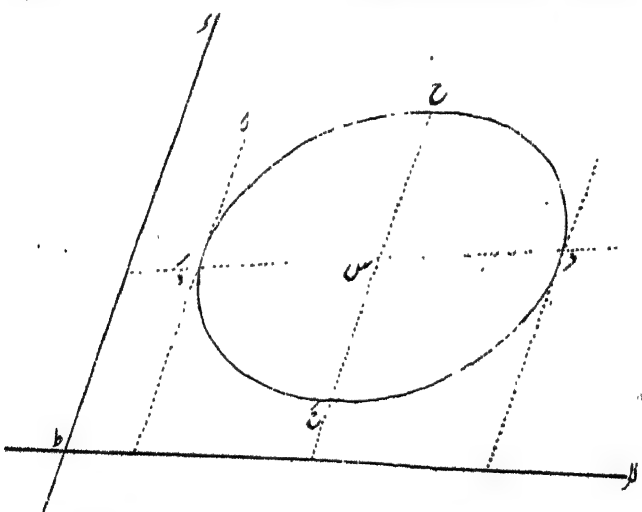
باب سیزدهم ۲۰۷ خزانه دوم کی سادات

۲۶۹ میں شمار کی گئی ہیں ایک کو ضرور تعبیر کر لیا تو اسے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ ایک بیضوی کو تعبیر کیا
ساوات (۵) کی صورت سے ہم دیکھتے ہیں کہ تر متوازی محور کی تھخیف اس خط سے ہوتی ہیں کہ

اسوے کہ فرض کرو کہ (۵) کے خط انحنی پر دو نقطی ہوں جنکا محض مشترک لہذا ہواور معین کا اور گہرے
اور ۵ مطابق اسکے معین (۴) کا ہوتا

$$\begin{aligned}
 & 1 = \text{ھ} + \text{ب} \\
 & 2 = \text{ھ} + \text{ل} + \text{ب} + \\
 & 3 = \text{ھ} + \text{ل} + \text{ب} - \\
 & 4 = \frac{1}{2} (\text{ک} + \text{ز})
 \end{aligned}$$

اور اس وقت نقطہ (لد و مک) عین وسط میں نقاط (لد و مک) اور (لد و مک) کے میں



شکل میں دس ذبیہ کرتا ہی تھا = ۱۰ + ۱۰ کو اور محاذ نقطہ ڈاؤر کے برابر
سر میں فرض کرو کہ برآسر کے ہی۔ مرکز میں وسط میں درمیان ڈاؤر کے ہی تو اسکا
اسیوٹا ۱ (بر + سر) ہی۔ مساوات خط منحنی سے معین نقاط ڈاؤر اور ج اور ج
کے معلوم ہونگے

چونکہ ح ح تنوازی اوتار کا ہی جنکو دہ تصنیف کرنا ہے اور د ح اور ح ح اقطار اور د ح میں

ح ح ایک مقدار معلوم ہے اسلئے کہ ح اور ح معلوم ہیں اور نیز دہ بھی معلوم مقدار اسلئے کہ

محد اور معین نقاط داورد کے معلوم ہیں۔ تو زاویہ درمیانی ح ح اور دہ کے مساوات دہ

معلوم ہو سکتے ہیں تو دفعات (۱۹ اور ۱۹) سے محور بصری کے معلوم ہو سکتے ہیں

دروم فرض کرو کہ ص - ۴ ط س مثبت ہی لیکو بجای ص - ۴ ط س کے لکھو تو مساوات

(۳) یہ ہو جائیگی $[d = ھ + د + ب \pm (و) (ل + ۲ + ۲ + ق)]$ — (۴)

اب $ل + ۲ + ۲ + ق = (ل + ۲ + ۲ + ق - ۲)$ مقرر کی جائے

پس اگر ق - ۲ مثبت ہو تو مقدار جذر کی اندر ہمیشہ مثبت ہوگی خواہ ل کی کچھ ہی مثبت اور

اس واسطے خط منحنی لہ انتہا ہی پہنچتا ہی اور جس طرح پہلے ثابت ہوا ہی یہاں بھی ثابت ہوگا

ایک قطر خط منحنی کا ہی لیکن وہ کبھی خط منحنی سے نہیں ملتا کیونکہ مقدار لہ + ۲ + ۲ + ق یا

(ل + ۲ + ۲ + ق - ۲) کی فائز نہیں ہوتی۔ اسے معلوم ہوا کہ خط منحنی کی دو شاخیں ہیں

جو آپس میں قطع نہیں ملتیں اور غیر متناہی ہلتی ہیں اور اس واسطے وہ ایک بعید البصری ہے

اگر ق - ۲ = ۰ تو (۴) یہ ہو جائیگی

$d = ھ + د + ب \pm (و) (ل + ۲ + ۲ + ق)$ تو مقام

تو مقام نقاط دو خطوط متقیم تقاطع ہونگے

اگر ق - ۲ منفی ہو تو ہم پہلے طرح (۴) کو اس صورت میں لکھ سکتے ہیں کہ

$d = ھ + د + ب \pm (و) (ل - ۲ - ۲ - ق)$ اسے معلوم ہوا کہ ل کی ہر ایک قیمت ہو سکتی ہی مثبت ہو یا منفی اللہ فیتین جو برابر کے درمیان واقع ہوں گے

اسے معلوم ہوا کہ خط منحنی میں دو فرع ہیں جو لہ انتہا پہنچتی ہیں اور آپس میں متقی نہیں ہوتے وہ بعید البصری

اس صورت کی ہم ایک مثال لیتے ہیں خطوط متقیم الملاقات کے مقام دریافت کرنے میں ہماری ہی اطلاع

مساوات خط منحنی کی یہ ہے کہ $[d = ھ + د + ب \pm (و) (ل + ۲ + ۲ + ق)]$

$\therefore d = ھ + د + ب \pm (و) (ل + ۲ + ۲ + ق)$ اسکو ضابطہ شامی کے موافق پہنچاؤ تو

$$x = \text{ھلہ} + \text{ب} + \text{لد} + \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{ع}{\text{ھلہ}} + \frac{ق}{\text{لد}} \right) + \text{وغیرہ} \right]$$

$$= \text{ھلہ} + \text{ب} \pm \text{ماو} (\text{لد} + ع) + \text{وغیرہ}$$

اوص اور رتین ہیں اور نہیں لکھی منفی قوتیں ہیں اور سوا سوا وہ لاکھ بڑا ہے اس قدر کم ہو سکتی ہیں جقدر چاہیں
اسے معلوم ہوا کہ موافق خاصیت تمنع الملاقات کے مساوات مطلوب خطوط تمنع الملاقات کی یہ ہوگی کہ

$$x = \text{ھلہ} + \text{ب} + \text{ماو} (\text{لد} + ع)$$

$$x = \text{ھلہ} + \text{ب} + \text{ماو} (\text{لد} + ع)$$

اسے معلوم ہوا کہ خطوط تمنع الملاقات ہم کنج کے ہیں اور اس طرح مجرور کو بنا سکے ہیں کیونکہ وہ
خطوط تمنع الملاقات کے نزاد یہ درمیانی کی تصنیف کرتے ہیں اور نقطہ تقاطع خطوط تمنع الملاقات

کا مرکز ہے اسے مقام اور شبہ البعد البصوی کی معلوم ہو جائیگی

$$\text{جلاق} - ع = (1 - 4 \text{س ف}) - (ص 2 - 4 \text{ط س}) - (ص 1 - 2 \text{س د})$$

$$(ص 1 - 4 \text{ط س})$$

فنا ہوتا ہے جبکہ

$$(1 - 4 \text{س ف}) - (ص 2 - 4 \text{ط س}) - (ص 1 - 2 \text{س د}) = 0$$

اور اس طرح

$$(ص 1 - 4 \text{ط س}) + ف + 1 = ص 2 - ص 1 = د$$

اگر یہ ارتباط مستحکم اور قطعی نہ ہو تو مقام النقاط دو خطوط مستقیم تقاطع ہونگے
اب تک ہم نے یہ فرض کیا ہے کہ ص صفر نہیں ہے اور چونکہ ص - 4 ط س کسی طرح ص کے صفر
ہونے سے منفی نہیں ہو سکتا تھا اسلئے صورت اول میں تو ص کے صفر ہو گیا بیان کرنا کہ یہ صورت
مگر جب ص - 4 ط س مثبت ہو تو اس میں ص کا صفر ہونا ممکن ہے اسلئے اب ہم ان نتائج کا بیان
کرتے ہیں جو ص کے صفر ہونے سے پیدا ہوتے ہیں

مساوات (۱) جیسے بلحاظ لاکھ لکھی تھی اس طرح بلحاظ د کے حل ہو سکتی ہے بعد تحقیقات
کرنے کے یہ دریافت ہوگا کہ اب تک جو نتائج ص - 4 ط س کے مثبت فرض کرنے سے دریافت ہوئی تھی
وہ سب صحیح اور درست ہیں نہ طریقہ ط اور ص دونوں صفر نہ ہوں اب یہ آخر صورت اور زیادہ
استحسان کی محتاج ہی فرض کرو کہ ط = 0 اور ص = 0 تو مساوات (۱) یہ ہو جائیگی کہ

$$ص لد + د لد + ص ف = 0$$

بعد کو تبدیل کرنے سے اس مساوات کو اس صورت میں رکھ سکتی ہیں

$$\text{ص ل ل ک} + \text{ف} = \text{ف}$$

$$\text{ف} = \text{ص ل ل ک} - \text{دی}$$

اس میں
اسو کے خط منحنی بعید البیضوی ہی اور اس کے محور بنی خطوط متعین الملاقات ہیں مگر صورت ص ف - دی =
مستثنیٰ ہے اس صورت میں وہ دو خطوط مستقیم متقاطعیں جب کہ ط = ۱۰ اور س = ۰ توجہ

(ص - ۴ ط س) + ط ی + س د - ص ی د
مختصر ہو کر یہ ہو جائیگا کہ ص (ص ف - دی) پس یہ نتیجہ نکالے ہیں کہ جب ص - ۴ ط س مثبت ہو تو
توساوات (۱) ہمیشہ بعید البیضوی کو تعبیر کرتی ہے مگر جب
(ص - ۴ ط س) ف + ط ص + س د - ص ی د = ۰

کی ہو تو یہ صورت مستثنیٰ ہو جاتی ہے اور یہ وہ مساوات دو خطوط مستقیم متقاطعیں کو تعبیر کرتی ہے
سوم فرض کرو کہ ص - ۴ ط س = ۰ تو (۲) کی یہ صورت ہو جائیگی

$$= \frac{\text{ص ل ل ک} + \text{ف}}{\text{س}} \pm \frac{\text{ط ی}}{\text{س}} \quad \text{[ص ی - ۲ س د] ل ل ی - ۴ س ف}$$

اور اس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ $= \text{ص ل ل ک} + \text{ب} \pm \frac{\text{ط ی}}{\text{س}} - \text{ع ل ل ق}$

اس میں ص = $\frac{\text{ط ی}}{\text{س}}$ اور ب = $\frac{\text{ط ی}}{\text{س}}$

$\text{ع} = ۲$ (ص ی - ۲ س د) اور ق = $\frac{\text{ط ی}}{\text{س}}$ - ۴ س ف
اگر ع مثبت ہو تو علامت جذر کی اندر جملہ کی مثبت ہوگی اگر لدا الجبر کے موافق بڑا - $\frac{\text{ط ی}}{\text{س}}$ سی ہو

اور وہ جملہ منفی ہوگا
اگر لدا چھوٹا - $\frac{\text{ط ی}}{\text{س}}$ سی ہو اگر ع منفی ہو تو جو کچھ اوپر بیان ہوا، اس کو معکوس سمجھ لو
دونوں صورتوں میں خط منحنی صرف ایک سمت میں غیر متناہی پہنچتا ہی اور اس کو $\frac{\text{ط ی}}{\text{س}}$ وہ قریب البیضوی
خط $= \text{ص ل ل ک} + \text{ب}$ ایک قطر ہے اور تمام متعینوں کو جو متوازی محور کے ہوں تضعیف کرتا،
اور قریب البیضوی سے اس نقطہ پر ملتا ہے جس کے واسطے $\text{ل ل} = - \frac{\text{ط ی}}{\text{س}}$

اگر ع = ۰ . توساوات یہ ہو جائیگی

$$= \text{ص ل ل ک} + \text{ب} \pm \frac{\text{ط ی}}{\text{س}}$$

پس اگر ق مثبت ہو تو یہ مساوات دو خطوط مستقیم متوازیہ کو تعبیر کریگی اور اگر ق = ۰ تو ایک
خط مستقیم کو تعبیر کریگی اور اگر ق منفی ہے تو تمام اللقاط ناممکن ہے یعنی تیسری صورت میں
ایک یہ فرض کیا ہے کہ س صفر نہیں ہے اگر س = ۰ تو ص = ۰ کیونکہ ص - ۴ ط س = ۰

اسے معلوم ہو کہ ط اور س دونوں صفر نہیں ہو سکتے

اسلئے کہ مساوات (۱) مساوات درجہ دوم کی فرض کی گئی ہے

اب ہم موافق سابق کے مساوات (۱) کو بطریق لاک کی حل کرتے ہیں اور یہ س = ۰ کے ہونے سے
ہو خاص باتیں واقع ہوں اور انکی تحقیقات کرتے ہیں مثلاً جب س کو صفر نہیں فرض کیا ہے تو کم ہو گیا ہے
کہ مقام النقطہ میں دو خطوط مستقیم متوازی ہو چکی جب

ص ی - ۲ س د = ۰ اور ی آ - ۲ س ف ثابت ہو

اسی طرح اگر ط صفر نہ ہو تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ مقام النقطہ دو خطوط مستقیم متوازیہ ہوں گے جب
ص د - ۲ ط ی = ۰ اور د آ - ۲ ط ف = ۰ ثابت ہو

اس ارتباط ص - ۲ ط س = ۰ کی وساطت سے اس بات کا ثبات کرنا آسان ہی کہ
جب ط اور س دونوں صفر سے مختلف ہوں تو شرائط کی دوسری صورت شرائط کی اول
صورت کے ساتھ مطابقت ہوتی ہے جب ل د = ۰ تو ضرور ہی کہ دوسری صورت شرائط
کی ہو اگر جب پہلی صورت بھی شرائط کی اس حالت پر حاوی ہے

اسی طرح اود صورتوں کی بھی تحقیقات ہو سکتی ہے کہ جن میں مقام النقطہ ایک خط مستقیم ہو یا
(۲۸۰) مساوات

ط ل ل + ص ل ل + س ک + د ل ل + ی د + ف = ۰

کے مقام النقطہ کے باب میں جو نتائج اچری بیان ہوئی اور انکواب ہم دوبارہ لکھتے ہیں
اول اگر ص - ۲ ط س منفی ہو تو مقام النقطہ بیضوی ہوگا اور ان میں یہ اختلافات ہو

(۱) س = ط اور ط = ص = محور دیک کے زاویہ درمیانی کی جیب کے تو مقام النقطہ دائرہ بیضی (۲۸۱)

(۲) (ی - ۲ س ف) (ص - ۲ ط س) - (ص ی - ۲ س د) مثبت ہی تو مقام النقطہ بیضی

(۳) (ی - ۲ س ف) (ص - ۲ ط س) - (ص ی - ۲ س د) = ۰ تو مقام النقطہ نقطہ ہی

دوم اگر ص - ۲ ط س مثبت ہو تو مقام النقطہ بیضی ہوگا اگر جب

(ص - ۲ ط س) (ف + ط ی + س د - ص دی) = ۰

تو مقام النقطہ دو خط مستقیم متوازیہ ہوں گے

سوم اگر ص - ۲ ط س = ۰ تو مقام النقطہ بیضی ہی اگر صورت متشبی ہے کہ

ص ی - ۲ س د = ۰ اور ص د - ۲ ط ی = ۰ اس صورت میں مقام النقطہ دو خط مستقیم

متوازی ہونے اگر ی۔ ۴ س ف اور د۔ ۴ ط ف ثابت ہیں اور ایک خط تسلیم ہوگا
اگر ی۔ ۴ س ف اور د۔ ۴ و ف صفر ہوں اور تمام النقاط نامکن ہوگا اگر یہ دو نامنفی ہوں
مثالیں

(۱) مرکز نصف لہ۔ ۴ لہ + ۴ و۔ ۴ ط لہ + ۴ ط ی۔ ۴ کا دریافت کرو

(۲) بیضوی صء (۱-س) + س لہ (۱-ص) = لہ

کا مرکز دریافت کرو

(۳) ط لہ + ۴ ص لہ + ۴ س ی = اے جب ص = ط س کی ہو کیا تعبیر ہوتا ہے

(۴) ایک دائرہ معلوم قطع میں دائرہ بنایا گیا ہے اسکے مرکز کا مقام النقاط دریافت کرو اور
قطع کو احاطہ کرتے ہیں وہ قائم رہتے ہیں

(۵) مثلث اب س سے ضلع اب میں نقطہ کا مقرر کیا گیا ہے اور ق عمود اس پر نکالا گیا ہے
تو خطوط مستقیم ق اور س کے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

(۶) دی کوئی وتر بیضوی کے محور اکرو کا متوازی ہے اور اس بیضوی کا مرکز س ہے اور د
اور س ی نقطہ پر تقاطع کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ مقام النقاط بعید البیضوی اور اسے خطوط
متنع الحافات کی سمت دریافت کرو

(۷) دو بیضویان کسی مرکز ہیں اور انکی محور کے سینین منطبق ہوتی ہیں انکی ماس نقطہ سے کچھ گئی
اور انکو ماس نقطہ پر تقاطع کرتے ہیں اگر نقطہ ہمیشہ ایک خط مستقیم ہی میں واقع ہو تو ثابت
کرو کہ مقام النقاط کا قائم الزاویہ بعید البیضوی ہے

(۸) اوپر کی مثال میں کیا نتیجہ پایا ہوگا اگر محور جو متحد السمیت ہیں اوہی ہوں

(۹) ثابت کرو کہ بعید البیضوی سطح رسم ہو سکتی ہے کہ دو خطوط مستقیم متحرک ہوں اور وہ ہمیشہ
اپنے متوازی رہیں اور نقطہ معین سے انکی فاصلوں کا صلضب ایک بالک استقلال مقدار معین ہو

(۱۰) بیضوی کے ماس کسی دو خطوط مستقیم کچھ گئے ہیں اور د ماس دریا فی زاویہ ہمیشہ ایک بالک استقلال
مقدار رہتا ہے اور جن نقطوں پر یہ خطوط بیضوی سے ملے ہیں ان کے ماس نکالے گئے ہیں

ماسوں کے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

(۱۱) اس قریب البیضوی کا عرض مستقیم دریافت کرو

(۱-لہ) = ط لہ

باب سیزدہم ۱۱۴ درجہ دوم کی مساوات

کا مقام النقاط اکثر ایک اور قریب البیضوی ہوگی لیکن اگر کسی مثلث کے ضلع قریب البیضوی کو سس کرین تو مقام النقاط ایک خط مستقیم ہوگا

(۲۳) ایک سلسلہ دائروں کا نقطہ معلوم ط پر گذرنا ہی اور اونکی مرکز پر ایک خط لاط میں ہیں اور ایک خط بس سے ملے ہیں فرض کرو کہ م وہ نقطہ ہے جس پر دائرہ دوبارہ خط لاط سے ملتا ہے اور

ن کوئی نقطہ ان نقطوں میں سے ہے جس پر ہم دائرہ بس سے ملتا ہے اور م اور ن سمجھو خط متوازی بس اور لاط کے جدا گانہ کچے گئے ہیں اور نقطہ ط پر وہ تقاطع کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ مقام النقاط ع کا بعد البیضوی ہے اور جب یہ دو خط متقاطع علی القوائم ہوں تو مقام النقاط قریب البیضوی ہوگا

(۲۴) ایک قریب البیضوی کے دو ماسوں کے محاذی راس پر زاویہ ب ہی تو ثابت کرو کہ اونکے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط بعد البیضوی ہی جس کے خطوط متعلقہ العلاقات قریب البیضوی محوروں پر زاویہ میلان بر بنائے ہیں کہ

(۲۵) اس خط منحنی مس بر = مس ب

ط لاط + ص لاد + س لاد + ی لاد + ف لاد + گ =

کے اون اوتار کے نقاط وسط کا مقام النقاط دریافت کرو جو متوازی خط لاد بر - ج م ر = اور اسے خط منحنی کے بڑے محوروں کا مقام دریافت کرو

(۲۶) ثابت کرو کہ مساوات (لاد - ط ا) + (کر - ط ا) = ط ا

دو بیضیوں کو تعبیر کرتی ہی

چودھواں باب

(۲۸۱) اب یہاں سائل متفرقہ بیان کرینگے جو تمام اشیائے مخروطی ہی متعلق ہیں مساوات تراش مخروطی کی اوس حالت میں دریافت کرو کہ مسد اور محوروں کے مقام کی درجہ کوئی قید نہ ہو

فرض کرو کہ ط اور ص محدین ہا کہہ کے ہوں اور مساوات خط منظم کے یہ ہے کہ

۱۔ لا + ب + ی + س = ۰
فاصلہ کسی نقطہ (لا و ی) کا مانکہ سے پہلے ہے
[(لا - ط) + (ی - ص)]
اور فاصلہ اسی نقطہ کا خط منقطع ہے
لا + ب + ی + س = ۰

فرض کرو کہ نسبت خارج المکرزی تراش مخروطی کی ہی تو اگر نقطہ (لا و ی) خط منحنی پر ہو تو جو جیب
[(لا - ط) + (ی - ص)] = ی (لا + ب + ی + س) (۱)
∴ (لا - ط) + (ی - ص) = ی (لا + ب + ی + س) (۲)

اب مساوات (۱) میں ہم یہ دیکھتے ہیں کہ تراش مخروطی کی کسی نقطہ کا فاصلہ مانکہ سے خواہ
اور محور کچھ ہی ہو اس نقطہ کی محدود کے اول قوت ارقام میں بیان ہو سکتا ہی اور اسکو اکثر اسطرح بیان
کیا کرتے ہیں کہ فاصلہ کسی نقطہ کا مانکہ سے اور نقطہ کے محدود کا طولانی جملہ ہوتا ہی
(۲۸۲) ابواب گذشتہ میں جو تراشہا مخروطی لکھی ہیں انکی مساواتوں کے امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ
کوئی تراش مخروطی ہاں مساوات

۲۔ م + لا + ن + لا = ۰
سے تعبیر ہو سکتی ہے مبداء راس خط منحنی کا ہے اور محور لا کا محور خط منحنی کا ہی م عرض مستقیم خط منحنی کا
اور قریب البیضوی میں ن = ۰ اور اور بیضوی میں ن منفی اور بیضیوی میں ن مثبت ہی دائرہ میں
م قطر دائرہ کا ہے اور ن = ۱ -

(۲۸۳) دوسرے درجہ کے خط منحنی کے کسی نقطہ سے جو مانکہ کا لاجب اسکی مساوات دریا
فرض کرو کہ مساوات خط منحنی کی یہ ہے کہ

(۱) ط + لا + ص + لا + س + ی + لا + ی + ق + س = ۰
محور خواہ قائم الزاویہ ہوں یا محور ہوں

فرض کرو کہ لا اور ی ایک نقطہ کے محدود میں
لا اور ی اس کے متصل کے نقطہ کے محدود میں
تو مساوات خط قاطع کی ان نقاط میں یہ ہوگی کہ
(۲) ی - ی = ی - ی (لا - لا)

چونکہ (لگ و گ) اور (لگ و گ) خط منحنی پر ہیں

$$ط لگ + ص لگ + س گ + د لگ + ی گ + ف =$$

$$ط لگ + ص لگ + س گ + د لگ + ی گ + ف =$$

$$\therefore (لگ - لگ) + (لگ - لگ) + (س - گ) + (د - لگ) + (ی - گ) + ف =$$

$$\text{یعنی (لگ - لگ) } [ط (لگ + لگ) + ص گ + د]$$

$$+ (س - گ) + (ی - گ) + ف =$$

$$\therefore \frac{ط (لگ + لگ) + ص گ + د}{س (س - گ) + (ی - گ) + ف} =$$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات (۲) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$س - گ = \frac{ط (لگ + لگ) + ص گ + د}{س (س - گ) + (ی - گ) + ف} \quad (۳)$$

اس مساوات کو یوں مختصر کر سکتے ہیں کہ

$$س (س - گ) + (ی - گ) + ف = ط (لگ + لگ) + ص گ + د$$

$$= س (س - گ) + (ی - گ) + ف + ط (لگ + لگ) + ص گ + د$$

$$= س (س - گ) + (ی - گ) + ف + ط (لگ + لگ) + ص گ + د$$

$$\therefore س (س - گ) + (ی - گ) + ف + ط (لگ + لگ) + ص گ + د = س (س - گ) + (ی - گ) + ف \quad (۴)$$

اگر ف = ۰ تو خط منحنی مبدعین گذرنا ہی اور مساوات عام کی اوس نقطہ پر یہ ہوگی کہ

$$س - گ = لگ$$

اس میں ہم دیکھتے ہیں کہ لگ اور گ یا لگ کے اشال جو مساوات خط منحنی میں ہیں نیز ملحق ہوتے

(۲۸۴) دفعہ گذشتہ کی مساوات (۱) خط منحنی کو تعبیر کرے اور محور قائم الزاویہ ہوں تو

مساوات عمود المماس کی نقطہ (لگ و گ) پر یہ ہوگی کہ

$$س - گ = \frac{س (س - گ) + (ی - گ) + ف}{ط (لگ + لگ) + ص گ + د} (لگ - لگ)$$

(۲۸۵) دفعہ ۱۸۳ کی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر دفعہ ۲۸۴ کی مساوات (۱) سے

جو خط منحنی تعبیر ہوتا ہے اوسکی ناماس نقطہ (ح اور ق) سے نکالیں تو مساوات و تر ماس کی یہ ہوگی

$$س (س - ق) + (ی - ح) + ف = ط (لگ + لگ) + ص ق + د + ح + ی + ق + ف =$$

(۲۸۶) تراش مخروطی کے تمام اوتار جو خط منحنی کے نقطہ معلوم پہنچے مجازی زاویہ قائم کہتے ہیں

عمود المماس پر اوس نقطہ پر تقاطع کرتے ہیں

خط منحنی کے نقطہ معلوم کو قائم الزاویہ محور کے نظام کا مبدع مقرر کرو اور فرض کرو کہ مساوات خط منحنی کی

(۱) ط ل د + ص ل د + س د + د ل د + ی د =
اس مساوات میں د = ۰ کے مقرر کرنے سے وہ نقطہ معلوم ہونگے جس پر محور ل د کا خط منحنی سے ملتا ہے
یعنی نقاط ل د = ۰ اور ل د = ۰ - ط کے معلوم ہونگے
اور اس طرح محور د کا خط منحنی سے جس نقطہ پر لکھا ہی او کے واسطے د = ۰ - ی
اسے معلوم ہوا کہ مساوات

$$1 = \frac{ل}{ط} + \frac{د}{ی}$$

(۲) یعنی
اوس وتر کو تعبیر کرتی ہی جو محور اور خط منحنی کے نقاط تقاطع میں ملایا جائے
اور نیز مساوات عمود المماس خط منحنی کی جو مبدا سے نکلیں بموجب دفعہ ۸۴ کے یہ ہے کہ

اسے معلوم ہوا کہ (۲) اور (۳) اوس نقطہ پر ملتی ہیں جس کے محدودین

$$\frac{ط + د}{ط + ی} = \frac{ط + د}{ط + ی}$$

میں اور جس کا بعد اس کے مبدا سے یہ ہے کہ

$$\sqrt{(د + ی)}$$

اب محوروں کی سمتوں کو تبدیل کرو اور مبدا کو بدستور کہو تو مساوات (۱) یہ ہو جائیگی کہ

$$ط ل د + ص ل د + س د + د ل د + ی د = ۰$$

اور دفعات ۲۷ اور ۲۷ سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ

$$ط + س = ط + د اور د + ی = د + ی$$

اسے معلوم ہوا کہ عمود المماس مبدا سے د ترحد کے اوس بعد مبدا سے ملاتی ہوگا ہے

جس پر وہ اصل تر سے ملتا ہی یعنی وہ ایک ہی نقطہ پر ملے گا اور چونکہ یہ سب صورتوں میں دیر
خواہ محوروں کی کچھ ہی سمت ہوں اسے یہ نتیجہ پیدا ہوتا ہے کہ تمام اوتار ایک ہی نقطہ پر تقاطع کرتے ہیں

(۲۸۷) دفعات ۵۴ اور ۲۰ اور ۳۶ کو باہم مقابلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات

قطبی کسی اس منحنی کی جس کا ماسکہ قطب ہو اور خط ابتدائی محور ہو یہ ہے کہ

$$نق = ۱ + ی$$

اس میں ل = نصف عرض مستقیم کے

فرض کرو کہ صرع خارج کیا گیا خط اخنی کے قطر صرع پر ملتا ہے تو

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} = \frac{n}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$$

اسے دعویٰ ثابت ہے
(۲۸۸) قطبی مساوات کسی تراش خروطی کی ماس کی جب تک اس کا قطب ہو اور خط ابتدائی محور ہو
بموجب دفعہ ۲۰۵ کے یہ ہے کہ

$$(1) \quad \dots \dots (r-1) \text{ جم } r + \text{جم } (r-1) = \frac{r}{2}$$

اسمین ہر نقطہ مانس کا محدود قوسی ہے
اس طرح مساوات قطبی مانس کو اس نقطہ سے نکالا جائے جس کا محدود قوسی باہر ہے

$$\frac{J}{\rho} = \text{محم ر} + \text{جم (ب-ب)} \quad (r) \quad \therefore \therefore \therefore$$

اور حسن نقطہ پر یہ دو نو ماس ملتے ہیں اور سپر کمپریسہ حاصل ہوتا ہے کہ

جم (هـ - ر) = جم (ب - ر)

لیکن یہاں $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r'}$ کے تحت فرض کے خلاف ہیں ایسا ہم ہیٹر کرتے ہیں کہ

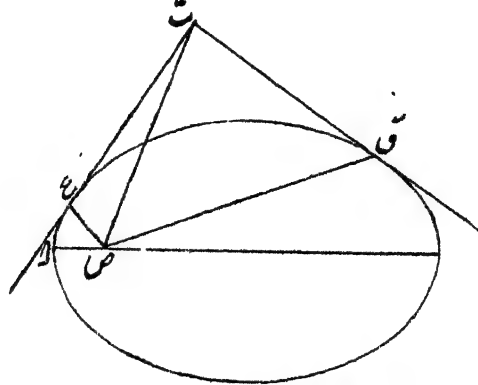
$$\frac{r}{r+h} = \frac{r}{r}$$

اسے معلوم ہوا کہ ماسخ جس نقطہ پر ملے، زمین اور سمکا محدود قوسی $\frac{2\pi}{3}$ ہے

شکلاً فرض کرو کہ تراش مخروطی برضوی اور

$$\text{اصع} = \text{هواصق} = \text{ب}$$

اور ماس نقاط اور ق سے نکالے گئے نقطہ پر مے مین

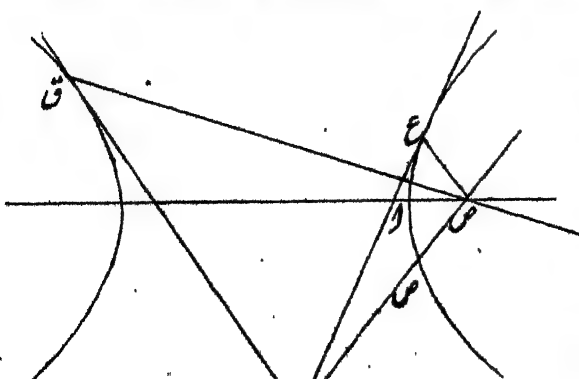


$$\begin{aligned} \text{تو اصل ت} &= \frac{\text{ص} + \text{ب}}{\text{ر}} \\ \text{یعنی ص ت} &= \frac{\text{ب} - \text{ص}}{\text{ر}} = \text{ق ص ت} \end{aligned}$$

یعنی کسی نقطہ سے دو ماس بیضوی کے کہیے گئے نقاط ماسکہ پر اپنی مجاذی برابر اور یہ بناتی ہیں
 علیٰ ذہا القیاس قریب البیضوی کے کسی نقطہ سے دو ماس کہیے گئے ماسکہ پر اپنی مجاذی برابر اور
 بناتے ہیں

اب بعید البیضوی میں دو صورتیں ہیں او نہیں تمیز کرنی چاہئے دفعہ ۲۳۱ میں ہم نے ثابت کر دیا
 جو نقطہ خط منحنی اور خطوط متع الملاقات کے اندر واقع ہو اسے دو ماس ایسے کہیے جاسکتے ہیں کہ
 خط منحنی کے ایک ہی فرع سے ملیں مگر کسی نقطہ سے جو خطوط متع الملاقات کی زوایا مکمل
 درمیان واقع ہو دو ماس خط منحنی کے مختلف فروع کے کہیے ہیں

اب اگر ایک نقطہ سے دو ماس نکالے گئے ایک ہی فرع بعید البیضوی سے ملے ہیں تو وہ بیضوی



کلی طرح ثابت ہو سکتا ہے
 کہ او کی مجاذی برابر
 ہو سکتی ہیں
 اب ہم دو صورت
 لکھتے ہیں جن میں مختلف
 فروع کو مس کرتے ہیں

سائل مختلفہ

یہود ہوان باب ۲۱۷ — مختلف فرج ابعید البصوی کے طے ہین
فرض کرو کہ ت ایک نقطہ پر بناس شروع اور ت ہی مختلف فرج ابعید البصوی کے طے ہین
اور اص = عہ کے اور زاویہ جو ص کی جانب سے ہیں محدودہ اص سے زاویہ بنانا ہے

ب ہی تو زاویہ ب بڑا کی سی ہے اور اص ق = ب - ک
پس مساواتین شروع اور ب ق جدا گا نہ یہ ہو نکلین

لی = ی جم ر + جم (عہ - ر) اور لی = ی جم ر + جم (ب - ر)

اور نقطہ پر وہ ملتی ہیں اس لئے ہر کو یہ حاصل ہو گا کہ

سطر = عہ + ی کے قدر کر کے ہمیں یعنی ایک زاویہ عہ + ی

حاصل ہو گا جو ب ص محدودہ اص کے ساتھ بنانا ہے پس

اص ت = ک - ب - عہ اور ت ص ق = ب - عہ

ت ص ع = ک - ب ص ق = ک

یعنی زاویہ جو ایک ماس اپنے محاذی ہر ایک ہر ایک پر بنانا ہے وہ مکملہ اوس زاویہ کا ہوتا ہے جو دوسرا

ماس اپنے محاذی اوسی ہر ایک پر بنانا ہے

(۲۸۹) ہم دفعہ ۱۰ امین قطب اور قطبیہ کی تعریف باعتبار دائرہ کے لگی ہی ہی تعریف پر تراش

مخروطی کی لحاظ ہو سکتی ہے فقط نقطہ دائرہ کی جگہ تراش مخروطی لکھ دو

پس اگر مساوات خط منحنی کی یہ ہو کہ

ط لا + ص لا + س ر + د لا + ی ر + ف =

تو مساوات قطبیہ (لا و ر) کی موجب دفعہ ۲۸۳ کے یہ ہو گی

لا (ط لا + ص لا + س ر + د لا + ی ر + ف) =

مستقیم کے قطب بن گزرا

فرض کرو کہ (لا و ر) قطب اول خط مستقیم کا ہو تو

لا (ط لا + ص لا + س ر + د لا + ی ر + ف) = (۱)

مساوات او ا خط کا ہے

فرض کرو کہ (ل و گ) قطب دوسرے خط استقیم کا ہو تو

$$\text{لا} (۲ ط ل ل + ص گ + د) + (۲ س گ + ص ل ل + ی) =$$

$$(۲) \quad + د ل ل + ی گ + ۲ ف = ۰$$

مساوات دوسرے خط استقیم کی ہے

چونکہ (۱) درمیان (ل و گ) کے گزرتا ہے تو کمپوہیہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لا} (۲ ط ل ل + ص گ + د) + (۲ س گ + ص ل ل + ی) + د ل ل + ی گ + ۲ ف = ۰$$

یعنی

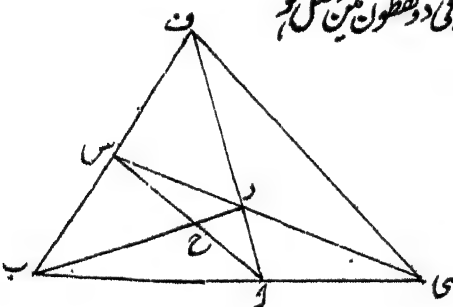
$$\text{لا} (۲ ط ل ل + ص گ + د) + (۲ س گ + ص ل ل + ی) + د ل ل + ی گ + ۲ ف = ۰$$

اسے معلوم ہوتا ہے کہ (۲) نقطہ (ل و گ) پر گزرتا ہے

(۲۹۱) دو خطوط منتظم کا نقطہ تقاطع قطب اوس خط استقیم کا ہوتا ہے جو ان خطوط استقیم کے قطبوں کے

دفعہ ۱۲۲ دیکھو (۲۹۲) اگر دو اربعہ الاضلاع اب س د تراشیں مخروطی کے اندر بنا جائے تو تین نقاط ای او ف اور ج

ہر ایک قطب اوس خط کا ہوگا جو باقی دو نقطوں میں وصل ہو



فرض کرو کہ جی مسد ہو اور جی آ اور جی ڈ سمت لا اور کی محوروں کی ہو

اور مساوات تراشیں مخروطی کی یہ ہو کہ

$$(۱) \quad ط ل ل + ص ل ل + س د + د ل ل + ی د + ف = ۰$$

اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ

$$جی آ = ج \quad اور \quad جی ب = ح$$

$$جی د = ق \quad اور \quad جی س = قی$$

$$(۲) \quad \dots \dots \dots ۱ = \frac{ق}{ج} + \frac{ل}{ج}$$

$$(۳) \quad \dots \dots \dots ۱ = \frac{ق}{ج} + \frac{ل}{ج}$$

$$(۴) \quad \dots \dots \dots ۱ = \frac{ق}{ج} + \frac{ل}{ج}$$

$$(۵) \quad \dots \dots \dots ۱ = \frac{ق}{ج} + \frac{ل}{ج}$$

(۲) اور (۳) سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے کہ

$$\text{لد} \left(\frac{1}{\text{ح}} + \frac{1}{\text{ح}} \right) + \left(\frac{1}{\text{ح}} + \frac{1}{\text{ح}} \right) = ۲ \quad (۶)$$

یہ مساوات اس خط کی ہی جو نقطہ ح پر گزرتا ہی لیکن (۴) اور (۵) سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ (۶) بعض خط کی مساوات کو تعبیر کرتا ہی جو نقطہ ت پر گزرتا ہی اسے معلوم ہوا کہ

(۶) مساوات ح کی ہو

فرض کرو کہ (۱) میں $۲ = ۰$ تو مساوات درجہ دوم کی یہ ہو گی کہ

$$\text{ط} \text{لد} + \text{د} \text{لد} + \text{ف} = ۰$$

اور قیمتیں اس مساوات کی ح اور ح میں اسے معلوم ہوا کہ

$$\text{ح} + \text{ح} = ۰ \quad \text{ح} - \frac{۲}{\text{ح}} \quad \text{ح} = \frac{۲}{\text{ح}}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ح}} + \frac{1}{\text{ح}} = \frac{۲}{\text{ح}}$$

$$\text{اسی طرح} \quad \frac{1}{\text{ح}} + \frac{1}{\text{ح}} = \frac{۲}{\text{ح}}$$

اسے معلوم ہوا کہ (۶) کی صورت یہ ہو جائیگی

$$\text{لد} + \text{ی} + ۲ = ۰$$

لیکن یہ بموجب دفعہ ۲۹ کے مساوات قطبیہ میں برکتی ہے اسی واسطے ح قطبیہ کی کا ہے اور علیٰ ہذا القیاس ی ح قطبیہ کا ہی ہے ثابت ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۹ کی ح قطب ی ف کا ہی

(۲۹) جب محور ماس میں تو مساوات عام تر از اش مخروطی کی دریافت کرو

$$\text{فرض کرو} \quad \text{ط} \text{لد} + \text{ص} \text{لد} + \text{س} + \text{د} + \text{لد} + \text{ی} + ۲ = ۰ \quad (۱)$$

مساوات تراش مخروطی کی ہو

محور کے جہان خط منحنی ملتا ہی ومان $۲ = ۰$ کے اوپر کی مساوات میں ہے پس

$\text{ط} \text{لد} + \text{د} + \text{ف} = ۰$
اگر محور لا کا ماس خط منحنی کا ہو تو وہ خط منحنی سے صرف ایک نقطہ پر بموجب دفعہ ۱۷ کے ملے گا اسے معلوم ہوا کہ مساوات بالذکر قیمتیں مساوی ہوں اسی واسطے

$\text{د} = ۲$ ط ف
اور علیٰ ہذا القیاس محور کا ماس (۱) کا ہی اسلئے ہو نہ بد حاصل ہوتا ہی کہ

$\text{ی} = ۲$ س ف
اب قیمتیں ط اور س کی (۲) اور (۳) سے نکال کر (۱) میں رکھو تو (۱) کی یہ صورت ہو جائیگی

$$\text{د} \text{لد} + \text{ص} \text{لد} + \text{ی} + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۰$$

یعنی (دلا + ی + د + ۲ ف) + (۴ ص - ۲ دی) لا = .
 یعنی (۲ ص لا + ۲ ی + ۱ + ۲) + (۲ ص - ۲ دی) لا = .
 ۲ ص = ۱ - ۲ ص اور ۲ ی = ۱ - ۲ ص اور ۲ ص = ۱ - ۲ ص = ۱ - ۲ ص
 پس مساوات مطلوبہ یہ حاصل ہوگی کہ

$$\left(\frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳} - ۱\right) + ۱ = ۱ - ۲ ص$$

لا اور د = کے متواتر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ وہ فاصلہ سب سے ہی جبہ خط منحنی محور لا
 ملتا ہے اور ق وہ فاصلہ سب سے ہی جبہ خط منحنی محور سے ملتا ہے
 اگر یہ مطلوب ہو کہ ایسی تراش مخروطی دریافت کریں کہ جو خط مستقیم معلومہ کو معلوم نقطہ
 پیرس کرے اور ایک اور نقطہ معلوم پر گزرے تو ہم کو وہ مساوات جو سب سے آخر لکھی ہوئی ہے فرض
 کرنی چاہئے اور جن خطوں کو وہ مس کرے ان کو محور لا اور کے مقرر کرنے چاہئے اور پھر اس نقطہ کے
 محددین کو جبہ تراش مخروطی گذرے مساوات میں مندرج کرو
 تو ایک ثابت ہوگی دریافت ہوگی پس اس معلوم ہوا کہ فقط ایک ہی تراش مخروطی ہی جو معطیات
 کی شرائط کو دور کرتی ہیں
 (۲۹۴) فرض کرو کہ مساوات

$$(۱) \quad \left(\frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳} - ۱\right) + ۱ = ۱ - ۲ ص$$

قریب البینوی کو تعبیر کرتی ہے تو بموجب دفعہ ۲۸۰ کے

$$\left(\frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳} - ۱\right) + ۱ = ۱ - ۲ ص$$

اگر د = ۱ - ۲ ص ہو تو (۱) یہ ہو جائیگی کہ

$$\left(\frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳} - ۱\right) + ۱ = ۱ - ۲ ص$$

یہ مساوات اس خط کو تعبیر کرتی ہے کہ نقاط ماس (۱) اور محور لا میں وصل ہو
 اگر د = ۱ - ۲ ص ہو تو ہم کو (۱) سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(۲) \quad \left(\frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳} - ۱\right) + ۱ = ۱ - ۲ ص$$

$$\therefore \frac{ل}{ح} + \frac{ق}{ق} = 1 - \frac{ق}{ق} \pm \frac{ل}{ح}$$

$$\therefore \frac{ل}{ح} = \frac{ق}{ق} + \frac{ل}{ح} \pm 1$$

$$\therefore \frac{ل}{ح} \pm 1 = \frac{ق}{ق}$$

اسکو اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ

$$\frac{ل}{ح} + \frac{ق}{ق} = 1 \dots \dots \dots (۳)$$

اور یہ یاد رکھیں کہ جذر کی علامتیں مثبت یا منفی ہونگی پس (۳) مساوات قریب البیضوی کی چھبکی محور دو ماس قریب البیضوی کے ہیں (۲۹۵) قریب البیضوی کے ماس کی مساوات کی یہ صورت ہی کہ

$$\frac{ل}{ح} + \frac{ق}{ق} = 1 \dots \dots \dots (۱)$$

مساوات خط قاطع کی جو (ل د و) و (ل د و) پر گزرتا ہی ہے

ر - ر = $\frac{ق}{ق} - \frac{ق}{ق}$ (ل - ل) چونکہ (ل د و) اور (ل د و) قریب البیضوی ہیں تو کچھ بیان حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ل}{ح} + \frac{ق}{ق} = 1 \text{ اور}$$

$$\frac{ل}{ح} + \frac{ق}{ق} = 1$$

$$\frac{ل}{ح} - \frac{ق}{ق} = \frac{ل}{ح} - \frac{ق}{ق}$$

$$\text{اور } \frac{ق}{ق} - \frac{ق}{ق} = \frac{ل}{ح} - \frac{ق}{ق} \cdot \frac{ل}{ح} - \frac{ق}{ق} = \frac{ل}{ح} - \frac{ق}{ق}$$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات قاطع المنحنی کی اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ

$$ر - ر = \frac{ق}{ق} \cdot \frac{ل}{ح} + \frac{ق}{ق} \cdot \frac{ل}{ح} \cdot (ل - ل)$$

پس مساوات ماس کی جو (ل د و) پچھلے ہو گی کہ

$$ر - ر = \frac{ق}{ق} \cdot \frac{ل}{ح} - (ل - ل)$$

$$\text{یعنی } 1 = \frac{ق}{ق} + \frac{ل}{ح} = \frac{ق}{ق} + \frac{ل}{ح}$$

تمثیل خطوط منحنی

(۴۹) دو خطوط منحنی کو متشابہ اور ہم وضع کہتے ہیں جب نصف قطر دائرہ کسی نقطہ معین سے کسی سمت میں اول خط منحنی تک پہنچا گیا نسبت بالانتقال دوسرے نصف قطر دائرہ سے رکھی جو کسی نقطہ معین سے دوسرے خط منحنی تک سمت متوازی میں پہنچا جائے۔
یادو خطوط منحنی کو متشابہ کہتے ہیں جب کہ نصف قطر دائرہ کسی نقطہ معین سے اول خط منحنی تک کسی سمت میں پہنچا گیا نسبت بالانتقال اوس نصف قطر دائرہ سے رکھے جو کسی نقطہ معین سے دوسرے خط منحنی تک اسی سمت میں پہنچا جائے کہ وہ پہلی سمت پر زاویہ مستقل پر میلان رکھے۔

ان دو نقاط معین کو مرکز نامہ ثابت کہتے ہیں اگر دو خطوط منحنی متشابہ ہوں اور مرکز نامہ ثابت کا زوج موجود ہو تو ازواج مرکز نامہ ثابت کے شمار دریافت ہو سکتی ہیں

اسو کہ فرض کرو Γ اور Δ مرکز نامہ ثابت کی زوج کو تعبیر کریں اور طے اور ق نصف اقطار دائرہ اول خط منحنی کے ہوں اور طے اور ق اُن کے متناظر نصف اقطار دائرہ دوسرے خط منحنی کے ایسے ہوں

کہ زاویہ $\Gamma ط ق =$ زاویہ $\Delta ط ق$ اور

$$\frac{\Gamma ط}{\Gamma ق} = \frac{\Delta ط}{\Delta ق}$$

کوئی نقطہ ص مقرر کرو اور ط میں خط ملاؤ اور زاویہ $\Gamma ط ص =$ زاویہ $\Delta ط ص$ زاو ایک ہی سمت میں اندازہ کئے جاتے ہیں اور ط ص ایسا مقرر کرو کہ

$$\frac{\Gamma ط ص}{\Gamma ق} = \frac{\Delta ط ص}{\Delta ق}$$

پس ص اور ص ہی مرکز نامہ ثابت ہوئی
اسو کہ ص Γ اور ص Δ اور ص Γ اور ص Δ ملاؤ تو مثلث ص ط Γ اور ط Δ متشابہ ہیں

اور مثلث ص ط Γ اور ص Δ ق بھی متشابہ ہیں
اسے آسانی استخراج ہوتا ہے کہ

$$\text{زاویہ } ق ص \Gamma = ق ص \Delta$$

اور $\frac{\text{ص ق}}{\text{ص ق}} = \frac{\text{ص ق}}{\text{ص ق}}$
پس دعوی ثابت ہی

(۲۹۸) تمام قریب البیضویان تشابہ ہوتی ہیں
فرض کرو کہ ۴ ط عرض مستقیم ایک قریب البیضوی ہو اور ۴ ط عرض مستقیم دوسرے قریب البیضوی کا
تو قطبیں اوائن ان خطوط منحنی کی جگہ ہر جگہ نہ قطب ہوں یہ ہیں کہ

$$\frac{۲}{۱+۲} = ۱$$

$$\frac{۲}{۱+۲} = ۱$$

اسے معلوم ہوا کہ اگر $r = ۲$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ
 $\frac{۲}{۱} = ۲$

پس کوئی سی دو قریب البیضویان ہوں وہ تشابہ ہوتی ہیں اور ہر جگہ اوائل مرکز یا ثابت ہوتے ہیں
(۲۹۹) وہ شرائط دریافت کرو جسے کہ خطوط منحنی

(۱) $۲ + ۱ = ۳$ $۲ + ۱ = ۳$ $۲ + ۱ = ۳$
(۲) $۲ + ۱ = ۳$ $۲ + ۱ = ۳$ $۲ + ۱ = ۳$

تشابہ اور ہم وضع ہوں
فرض کرو کہ مرکز یا ثابت (ح ق) و (ح ق) ہیں (۱) میں بجا لا اور کے
ح + ق + ج + ر اور ق + ق + ج + ر
جداگانہ رکھو تو ق کی مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی جسکو اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ
(۳) $۲ + ۱ = ۳$

(۲) میں بجا لا اور کے
رکھو تو ق کی مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی جسکو اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ
اب خطوط منحنی کے تشابہ اور ہم وضع ہونے کے واسطے ضرور ہے کہ $۲ + ۱ = ۳$ لیں اس میں اگر کوئی
مقدار مستقل ہے پس (۴) کی یہ صورت ہوگی کہ
(۵) $۲ + ۱ = ۳$

چونکہ (۳) یا (۵) سے قیمتیں فق کی حاصل ہو سکتی ہیں تو یہاں تاثرین متطابقہ ہو گئیں ہیں

$$\frac{ل}{کرم} = \frac{کرم}{ن} = \dots \dots \dots \frac{ن}{کرم} \quad (۶)$$

چونکہ ل اور ن میں رتقت کہیں ہے تو شرط ضروری یہہ استنباط ہوگی خواہ کچھ ہی ہو کہ ل مقدار مستقل ہو

ل اور ن کی جگہ اوٹکی قیمتیں رکھو تو

$$\frac{ط جرم ر + ص جب ر جرم ر + س جب ر}{ط جرم ر + ص جب ر جرم ر + س جب ر} = \text{ایک مقدار مستقل} = \text{یو کی مقرر کردہ (۷)}$$

یعنی (ط - و ط) جرم ر + (ص - و ص) جب ر جرم ر + (س - و س) جب ر = ۰

چونکہ یہ صحیح ہے خواہ کچھ ہی ہو اسے یہہ استخراج ہوتا ہے کہ

$$\frac{ط}{ص} = \frac{ص}{س} = \dots \dots \dots \frac{س}{ط} \quad (۸)$$

پس سے معلوم ہوا کہ (۱) اور (۲) مشابہ اور ہم وضع ہونگے واسطے شرط ضروری وہہ جو (۸) میں مندرج ہیں اب ہم یہی یہ تحقیق کرتے ہیں کہ یہہ شرط مشابہ ہونگے واسطے کافی ہیں سیدی ترکیب تو یہہ ہے اس بات کا امتحان کیا جائی کہ ح وق داور ح اور ق ایسی منتخب کئے جائیں کہ مساوات (۶) قائم رہی لیکن بہت سبب ترکیب یہہ ہیں کہ مساواتین (۱) اور (۲) بواسطت (۸) کے اس طرح لکھی جاسکتی ہیں کہ

$$ط لا + ص لا + س لا + و لا + ی + ف = ۰$$

$$ط لا + ص لا + س لا + و لا + ی + ف = ۰$$

اول فرض کرو کہ ص - ط = ۰ تو اکثر خط منحنی قریب البیضوی ہوتا اور سیاہ خط بہ خط مشابہ ہوتے ہیں اور نیز اونکے قطر ہی تساوی ہوتی ہیں اسلئے وہ ہم وضع ہی ہوتی دفعہ ۲۷۹ کے ہوتے ہیں اس نتیجہ کی بعض صورتیں مستثنیٰ ہیں اور یہہ مستثنیٰ صورتیں اس حالت میں سدا ہوتی ہیں کہ مقام التقاطع ای قریب البیضوی کی دو خطوط مستقیم یا ایک خط مستقیم یا ناقص ہو

دوم فرض کرو کہ ص - ط = ۰ یا صفر کے نہ تو ہم سدا کو بدل کر ایک خط منحنی کی مساوات

جو ہوا ان باب اس صورت میں تحویل کر کے ہیں

$$\text{طلا} + \text{ص لا} + \text{س ر} + \text{ق} = ۱$$

اب ان مساواتوں کو قطبی محدودین میں بیان کر کے اونکی یہ صورت بنا سکتے ہیں

$$\text{ق} = \frac{\text{طلا} + \text{ص جب ر} + \text{س جب ر} - \text{ق}}{\text{طلا} + \text{ص لا} + \text{س ر} + \text{ق}}$$

پس اگر $\text{ر} = ۰$ تو ہکو یہ حاصل ہوگا کہ $\frac{\text{طلا} + \text{ص جب ر} + \text{س جب ر}}{\text{طلا} + \text{ص لا} + \text{س ر} + \text{ق}} = \text{مقدار مستقل کے}$

اسے معلوم ہوگا کہ اکثر یہ خط و منحنی متشابہ اور ہم وضع ہونگے مگر اس نتیجہ کی بعض صورتیں متشبیہ اور بہت متشبیہ صورتیں اس سبب پیدا ہونگی کہ کوئی مقام انعطاف یا سجای خط منحنی ہونے کے دو خط و تقسیم یا ایک نقطہ یا نامکون ہو

(۳۰۰) دفعہ ۲۹۹ کی (۱) اور (۲) کے خط و منحنی کا فقط مشابہ ہونا ہم جابہین اور اوکے ساتھ ہم وضع

ہونکی قید نہیں لگائی (۱) میں لا اور کی جگہ

$$\text{ح} + \text{ق} + \text{جم ر} + \text{اور ق} + \text{ق} + \text{س جب ر}$$

رکھو اور (۲) میں لا اور کی جگہ جلا گانہ

$$\text{ح} + \text{ق} + \text{جم ر} + \text{اور ق} + \text{ق} + \text{س جب ر} + \text{اور ح}$$

رکھو اس میں بعض مستقل زاویہ کی مقدار ہی مگر بالفعل وہ غیر المعین ہی دفعہ ۲۹۹ کی طرح عمل کر دو تو جابہ

مساوات (۴) کے یہ مساوات ہکو حاصل ہوگی کہ

$$\text{طلا} + \text{ص جب ر} + \text{س جب ر}$$

$$\frac{\text{طلا} + \text{ص جب ر} + \text{س جب ر}}{\text{طلا} + \text{ص لا} + \text{س ر} + \text{ق}} = \text{مقدار مستقل کے ہو کے مقرر کر دو}$$

اسکو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{طلا} + \text{ص جب ر} + \text{س جب ر} = ۰$$

$$\begin{aligned} \text{اس میں } ۱ &= \text{طلا} + \text{ص جب ر} + \text{س جب ر} + \text{ص جب ر} + \text{س جب ر} \\ &= ۲ (\text{طلا} + \text{ص جب ر} + \text{س جب ر}) \\ &= ۳ (\text{طلا} + \text{ص جب ر} + \text{س جب ر}) \end{aligned}$$

چودھواں باب
پس خطوط منحنی کے مشابہ ہونے کے واسطے

$$\frac{س}{ط} = \frac{ص}{س+ل} = \frac{1}{ط}$$

اسے معلوم ہوا کہ ان نسبتوں میں سے ہر ایک برابر ہے $\frac{س}{س+ل}$ کے ہو

$$\frac{ص}{(س+ل)} = \frac{س}{(س+ل)}$$

$$\frac{ص}{(س+ل)} = \frac{س}{(س+ل)}$$

$$\frac{ط}{(س+ل)} = \frac{س}{(س+ل)}$$

$$\frac{ط}{(س+ل)} = \frac{س}{(س+ل)}$$

$$س + ل = س + ط$$

$$اور س + ل = س + ط = ص + ل$$

$$\frac{ص + ل}{(س + ل)} = \frac{س + ل}{(س + ل)}$$

اس ارتباط کا قائم ہونا خطوط منحنی کی مشابہت کے واسطے ضرور ہے

مثالیں

(۱) ایک نقطہ معین سے خطوط مستقیم کچھ گئے ہیں تو ثابت کرو کہ خطوط معین کے درمیان جو حصے ان خطوط کے آئینے او انکی نقاط وسط کا مقام ان نقاط البیضوی ہو گا جسے خطوط متبغ الملاقات متوازی ان خطوط معینہ کے ہوں گے

(۲) بیضوی کے کسی نقطہ ع سے ق ع ق متوازی محور اکبر کا کچھ اگیا ہی اور ع ق اور ع ق برابر بعد اسکے صد کے بنائی گئی ہیں نقاط ق اور ق کے مقام ان نقاط دریافت کرو

(۳) خطوط مستقیم معلوم لے اور ل ق میں نقاط متغیر ع اور ق ایسے مقرر کئے گئے ہیں کہ ل ع : ع ق : ق ق : ق ل تو ثابت کرو کہ ع ق اور ق ع کے نقطہ تقاطع کا مقام ان نقاط بیضوی ہے جو خطوط مستقیم معلوم کو نقاط ع اور ق میں سے کسی کے ق ہے

(۴) دو ماس ت ع اور ت ق قریب البیضوی کے کچے گئے ہیں اور ع اور ق نقاط تماس ہیں اور ایک تیسرا ماس انکو ع اور ق جداگانہ کا خطا ہی تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ت ع}{ت ق} = \frac{ت ق}{ت ق} = 1$$

(۵) قریب البیضوی کے دو ماس ت ع اور ت ق قریب اور ع اور ق نقاط تماس ہیں

اگر ع اور ت ایک تیسرا ماس کے قطع ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے حصص علی التبادل ہوں گے

(۶) ایک قریب البیضوی کی نقطہ ط دو خط تقاطع اور ق پیرس کرے ہوئے کچے گئے ہیں

اور ایک اور خط قریب البیضوی کو نقطہ ر پیرس کرتا ہے اور ط اور ق کو نقاط ص اور ت پر قطع کرتا ہے اگر نقطہ تقاطع ان خطوں کا ہو جو ع ب اور ق ص کو صلیب کی طرح وصل کرتی ہیں تو ط اور ر اور و ایک خط استقیم ہوں گے

(۷) ایک بیضوی کے نقطہ بیرونی سے دو ماس پچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ جو بیضوی اس بیضوی کے متشابہ اور ہم وضع ہو گے نقطہ بیرونی اور نقاط تماس اور مرکز بیضوی معلوم ہو گئے

(۸) اور ب دو بیضویان متحد المکز متشابہ اور ہم وضع ہیں اور اس ایک اور بیضوی متشابہ

اور ب کے ہی اور اس کا مرکز محیط پیرس اور اس کے محور متوازی ایاب کے محور و ک کے ہیں تو ثابت کرو کہ وتر تقاطع اور اس کا متوازی اس ماس کا ہو گا جو س کے مرکز سے ب کا نکلا جائے

(۹) کسی نقطہ اور اس کے خط قطبی اور خط منظم کے نقطہ تقاطع میں جو خط وصل ہوتا ہے

وہ لئے محاذی انہی نقطہ سے کہ پر زاویہ قائمہ بناتا ہے

(۱۰) اگر کسی نقطہ معلوم سے عمود الماس بیضوی کے کچے جائے جو نقطہ بیضوی کو قطع کرے وہ اس قائم الزاویہ بیضوی پر واقع ہوں گے جو نقطہ معلوم پر گذرتی ہے اور اس کے خطوط متنع متوازی محور بیضوی کے ہوں گے

(۱۱) اگر محیط دائرہ کے کسی نقطہ کے متحد اور معین س م اور م ع ہیں اور م ن برابر م ع کی ہے اور محیط اس کے ساتھ زاویہ مستقل پر سیلان رکھتا ہے تو نقطہ ن کا مقام ان نقاط ایک بیضوی ہو گا

(۱۲) ایک تراش مخروطی کی بیہ سوات معلوم ہے کہ
 $\text{ط لا} + ۲ \text{ ص لا} + ۲ \text{ ف} = ۰$
 تو مقام النقاط اور ان عمود الماسوں کی تقاطع کا دریافت کرو جو ایک ہی محدود ہر زوج معین کے

اطراف سے نکالے جائیں
 (۱۳) دو خطوط معینہ ایک سطح میں ہیں اور ان پر ایسے دو نقطے اور ق مقرر کی گئی ہیں کہ خط عرض
 ہمیشہ متوازی ایک خط معلوم کرتا رہے اور ق اور ق جدا جدا دو تقاطع معینہ اور ق سے مل گئے
 ہیں تو رے اور ق کے تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

(۱۴) ایک دائرہ کے کسی نقطے کا ماس کسی نقطہ معین کے ماس سے نقطہ پلٹا ہی اورت
 اور اس قطر کے ایک طرف بین خط ملا لیا گیا ہو اور مین گذرتا ہی تو ثابت کرو کہ رے اور ب ت کے
 تقاطع کا مقام النقاط بیضوی ہے

(۱۵) سوات قطبیہ ایک تراش مخروطی کی ہا کہ سے بیہ ہے کہ

تو ثابت کرو کہ سوات اس خط استقیم کی جو اس کو ان نقاط پر قطع کرتا رہی جن کے واسطے
 $\text{ر} = \text{ھ}$ اور ب جدا جدا ہیں بیہ ہے

$$\text{ط} - \text{ص} = \text{ر} = \text{ھ} \quad \text{ر} - \text{ھ} = \text{ط} \quad \text{ط} - \text{ھ} = \text{ر}$$

(۱۶) ایک تراش مخروطی مین اوتا کہ چم گئے ہیں جو ہا کہ پر زاویہ نقل ہاتے ہیں تو ثابت کرو کہ
 موقع عمود کا جو ہا کہ سے وتر نکلا لگا ایک دائرہ ہوگا الا ایک صورت مستثنی ہوگی جب مین خط استقیم
 (۱۷) اگر تراش مخروطی کے انبعاذ ہا کہ صے اور ص ق ہوں اور اس کا زاویہ درسیانی مستقل ہو
 تو ثابت کرو کہ ص ق متحدہ ہا کہ تراش مخروطی کو مس کرے گا

(۱۸) دو نقاط معینہ معلوم ہیں جن کے درسیان ایک تراش مخروطی واقع ہوتی ہی اور خط منظم معلوم
 تو ان کے مطابق جو ہا کہ ہو اس کا مقام النقاط دریافت کرو

(۱۹) ایک بیضوی کا ہا کہ اور خط منظم معلوم ہے اور ہا کہ مین ایک خط گذرتا رہی جو خط منظم
 سے ایسا زاویہ بناتا ہے جسکی جب نسبت خارجہ مرکزی بیضوی کی ہی تو ان نقاط کا مقام
 دریافت کرو جب ہر خط استقیم خط منحنی سے ملتا رہی اور نسبت خارجہ مرکزی متغیر ہے

(۲۰) مثل تراشہ کے مخروطی کچے گئے ہیں اور اونکا ہاسک اور خط منظم مشترک ہیں اور ہر خط منحنی میں ایک نقطہ مقرر کیا گیا ہے جس کا بعد ایک تبادیل معکوس عرض مستقیم کے ساتھ ہر کتابت تمام نقاط ان نقطوں کا دریافت کرو

(۲۱) دو تراش مخروطی کا ہاسک مشترک جس میں کوئی نصف قطر دائرہ خطوط منحنی سے تقاطع اور ہر چار جہاں ملتا ہوا کچا گیا ہے تو ثابت کرو کہ جو تاس نقاط اور ق سے نکالے جائیں اونکا نقطہ تقاطع ایک خط مستقیم ہے

ثابت کرو کہ تراشہ کے مخروطی کی خطوط منظم کے تقاطع ہر خط مستقیم گذرتا ہے اور زو جو وہ ان خطوں کے ساتھ بناتا ہے اونکی جین نسبت معکوس خارج المکرزی نسبتوں کے کہتی ہیں

(۲۲) ایک خط مستقیم بیضوی کو تقاطع اور ق پر قطع کرتا ہے اور ہر بیضی خط او اس بیضوی کو جو متشابہ اور ہم وضع متحد المکرزی بیضوی کی ہے کا مشابہ اور نقاط تقاطع میں سے ایک نقطہ ق پر ثابت کرو کہ خط اپنے متوازی حرکت کری تو ق ق. ق. مستقل ہوگا

(۲۳) دو خطوط مستقیم ط لہ اور ط و نقطہ ط پر تقاطع کرتے ہیں اون میں ط لہ = ط اور ط ب = ص مقرر کئے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ مرکز تمام تراشہ کے مخروطی کی جہان خطوں کو لہ اور ب پر کین او اس خط مستقیم میں واقع ہیں جس کی مساوات یہ ہے کہ

(۲۴) دو متساوی بیضیوں کی مرکز بنطبق ہیں اور اونکی محور ایک دوسرے کے ساتھ ایک ہی نقطہ پر ملتی ہیں اونکی اور ایک بیضوی کچے گئی ہے اور لہ اور ب نصف محور اس بیضوی کے ہیں اور ط اور ص نصف محور متساوی بیضیوں کے ہیں اور لہ اور ب اونکی محوروں کا زاویہ میلان ہے تو

$$ط لہ + لہ ب = (ط لہ + ب ط) + (ط لہ + ب ص) + (ط لہ + ب ص)$$

اور اسے ثابت کرو کہ دو متساوی بیضیوں کے اوپر متشابہ بیضوی کچے گئی ہے

(۲۵) دو متشابہ بیضیوں میں مشترک المکرز ہیں اور ایک دوسرے کو ٹس کرتے ہیں اور اونکی طولانی تقادیر کی نسبت ان ہوا کو کسی ایک بیضوی میں محور اکبر اور محور اصغر کی نسبت ہو اور محور اکبر باہر میلان زاویہ ص پر ہو تو ثابت کرو کہ

جب $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(۲۶) دو ماس (طا اور ص) ایک قریب البیضوی کے نقطہ پر تقاطع کرتے ہیں اور زاویہ میں سرسکا رکھتے ہیں تو ثبات کرو کہ بعد مرکز کل سے

(طا + ص) قط مے + ۲ طا ص مے مے

(۲۷) اگر دو وتر متقاطع علی القوی کسی نقطہ معینہ سے درجہ دوم خط منحنی سے ملیں تو ثبات کرو کہ

ایک مقدار مستقل ہی راور ر ایک وتر کے حصے میں جو نقطہ معین سے ہوتے ہیں اور ر اور ر دوسرے وتر کے حصے میں جو اوس نقطہ معین سے ہوتے ہیں

(۲۸) اون تمام قریب البیضویوں کے نقاط ماکہ کا مقام انقطاع = قد (اوس رجب رہے۔ ر)

ہی بنی و تر تمام محور و بنی ساہنہ زاویہ ہر بائیں میں اور ایک شکل میں ہمیشہ رقبہ مستقل کو قطع کرتے ہیں

(۲۹) ایک قریب البیضوی دو محور قائم الزاویہ کے درمیان متحرک ہوتی ہے تو ثبات اوسکی ہر ایک کونسا خط مرتسم کر لگا

(۳۰) ایک قریب البیضوی دو محور قائم الزاویہ کے درمیان متحرک ہوتی ہی تو ثبات اوسکی ہر ایک کونسا منحنی مرتسم ہوگا

(۳۱) متواتر دائرے اس طرح کھچ گئے ہیں کہ ایک اپنی قابل کے دائرہ کو باہر کھینچ کر تباہ اور ہر ایک قریب البیضوی کو دو جگہ ہنس کر تباہی تو ثبات کرو کہ اونکی نصف قطر سلسلہ حساب میں ہونے کے چکا فرق عام عرض مستقیم ہوگا

(۳۲) نظم بیضیوں کی مساوات موافق قائم الزاویہ محدود ہیں

ط لا + رس لا + ص لا = ن (طا + ص) ہے اس میں طا اور ص اور س متغیر متغیر ہیں اور ن مقدار مستقل ہے تو ثبات کرو کہ متوازی الاضلاع جو اس طرح بنائی جائی کہ اقطار عمود کا زوج اوس متوازی الاضلاع کے وتر ہوں ہمیشہ ایک دائرہ معین کے اوپر سرکھ سکنگے

(۳۳) کسی تراشیل مخروط کے ماس کے ایک نقطہ سے عمود اوس خط پر نکال جائے جو ماس کے

نقطہ تماس میں ملے تو ثابت کرو کہ تماس کے اس نقطہ کا بعد خط منقطع سے اور بعد سی مخروطی
عمود اور تماس کے درمیان ہے وہ نسبت رکھیں گے جو ا: ی

(۳۷) کسی عرض مستقیم معلوم کے موافق تراشیں مخروطی مرکز میں ہوں اور نقطہ تماس کے بعد خط مستقیم
جو اوپر سے قطع کریں تو اوپر کی درمیان جتنی توسیع لیں گی اونکے وتر ایک نقطہ پر گزریں گے ضرورت کی

صورت میں وتروں کو جڑا بھی لو
(۳۵) ایک خط جس کا طول ایک مقدار مستقل ہی سطح حرکت کرتا ہے کہ اس کی انجام دو خطوط معلوم

پر رہے ہیں تو جو نقطہ اس خط کو نسبت معلوم تقسیم کرتا ہے اونکا مقام النقاط دریافت کرو
(۳۶) کسی تراش مخروطی میں اگر اور رابعا دیکھ لیں کہ علی القوائیم اور نصف عرض مستقیم ہو تو

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \text{ ایک مقدار مستقل ہے}$$

(۳۷) دو تراش مخروطی سب سطح سی آئین برابر ہیں وہ سطح رکھ لیں کہ اونکی محور علی القوائیم میں ہوں

ماسکہ مشترک سے ص: ع اور ص: ق نصف قطر دائرہ ایک دوسرے کے ساتھ علی القوائیم میں ہوں
تقاطع اور ق سے تماس نکالے جائیں اونکے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

اور جب ص: ق ایک خط مستقیم ہو تو ہی مقام النقاط دریافت کرو

(۳۸) ص: اور ہ: ماسکے بیضوی کے ہیں اور ص: کے مرکز اور ہ: کے ماسکے پر ایک اور بیضوی بنائی

جس کا محور اصغر ساوی پہلے بیضوی کے عرض مستقیم کی ہی بیضوی کے کسی نقطہ سے ص: ق کے

جو دور سے ملے اب مطلوب یہ ہے کہ وہ اور معین ن: م کے تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

(۳۹) ۱ اور ب مرکز دو متساوی دائروں کے ہیں اور ۱: ع اور ب: ق ان دائروں کے نصف قطر علی القوائیم

ہیں اگر ۱: ب = ۲: ع تو خط ۱: ق ہمیشہ دائروں کے نقاط تقاطع کے ایک نقطہ پر گزرتا ہے

(۴۰) نقاط اور ر سے تماس تراش مخروطی کے کچھ گئے ہیں اور ایک اور تماس درمیان

نقطہ ق سے کہی گیا ہے اور ہ: ماسکے نقاط اور ن: پ ملتا ہے تو ثابت کرو کہ زاویہ م: ص: ن

نصف زاویہ ع: ص: ر کا ہے جس نقطہ ماسکے ہے

(۴۱) ق: و: م: ہ: دو ماسکوں درمیان کا زاویہ اوس زاویہ نصف ہوتا ہے جو وتر ماسکے

سحاذی نقطہ بنا کہ پیمانہ

(۲۲) ایک قریب البیضوی کے تین ماسوں کے تقاطع سے ایک مثلث بنا ہی تو ثابت کرو کہ جو دائرہ اس مثلث کے گرد بنے گا وہ نقطہ ہیکہ پر گزرے گا

(۲۳) نقطہ ہیکہ اور دو ماس ایک ترانہ مخروطی کی معلوم ہین تو ثابت کرو کہ وہ ترانہ اس نقطہ میں گزرتا ہے

(۲۴) بیضوی کے محور کو قطر بنا کر ایک دائرہ کچا ہی تو جو دائرہ کا ماس ہو اس کا قطب جو بلحاظ بیضوی کے ہو اس کا مقام النقاط دریافت کرو

(۲۵) قریب البیضوی میں دو برابر سطح صغ اور ق ص ق کچے گئے ہین تو ثابت کرو کہ وتر اس کے متوازی ع ق کا ع ق محدودہ سی اس ماس پر ملے گا جو اس سے نکال دیا جائے

(۲۶) اگر قریب البیضوی کی اس کے ایک وتر کی اوتار کی علی القوائم کچھ جائیں دراون پر ایک سطح قائم کامل بنائی جائی تو ثابت کرو کہ تمام النقاط آگے کے زاویہ کا ایک اور قریب البیضوی ہی

(۲۷) بیضوی کے محیط میں نقطہ صغ ہی اسی اوتار کی علی القوائم ع ق اور ع ر کچے گئے ہین تو اس نقطہ کے محدین کو جنہر ق را و عمود الماس کہ نقطہ صغ کہی جائے تقاطع کرتے ہین نقطہ صغ کے محدین کی رقمین میں بیان کرو اور ثابت کرو کہ اگر نقطہ صغ بیضوی پر متحرک ہو تو یہ نقطہ تقاطع ایک اور بیضوی میں رسم کرے گا جسکی مساوات یہ ہوگی

$$\frac{ل\alpha}{ط} + \frac{ح\kappa}{ص} = \left(\frac{ط}{ط + ص} \right) \frac{ل\alpha - ح\kappa}{ص}$$

(۲۸) مثلث مساوی الاضلاع کے اوپر جو بعید البیضوی مساوی الاضلاع بنائی جائی اس کے مرکز مقام النقاط وہ دائرہ ہوتا ہی جو اس مثلث کے اندر بنایا جائے

(۲۹) دو قریب البیضویان مساوی ہین اور اونکی محور اور اس ایک ہی ہین مگر اونکی سمتیں مخالف اور اوتا ایک قریب البیضوی کے ماس دو سے قریب البیضوی کے ہین تو ثابت کرو کہ تمام النقاط قریب البیضوی کے اوتار کے نقاط وسط کا ایک قریب البیضوی ہی جس کا عرض مستقیم ایک مثلث قریب البیضوی معلوم کے عرض مستقیم کا ہے

شالین

چودھواں باب

۳۳۳ کے لحاظ سے

(۵۰) ایک قریب بضوی کی مساوات اور ان ماسوں کے لحاظ سے لکھی جائے گی کہ

$$h \left(\frac{4}{5} \right) + h \left(\frac{1}{5} \right) = 1$$

سے

$$h \left(\frac{4}{5} \right) + h \left(\frac{1}{5} \right) = 1$$

(۵۱) اگر ط لا + ص لا + س لا + ط لا + ص لا + س لا = ۰ مساوات قریب بضوی

تو محور قریب بضوی کی مساوات

$$(ط + ص) (لا + ط) + (ص + س) (س + ط) = ۰$$

سے معلوم ہونگے

(۵۲) دو تساوی قریب بضوی متحد الماس میں اور انکی محور علی القوائم ہیں اور ایک عمود الماس

دوسرے کے عمود الماس پر زاویہ قائم بناتا ہے تو ثابت کرو کہ ایسی عمود الماسوں کے نقطہ تقاطع کا

مقام النقاط قریب بضوی ہے

(۵۳) ایک بضوی کے دو عمود الماس علی القوائم ہیں اور انکی تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

(۵۴) ایک بضوی کے اقطار مزدوج کے اطراف سے عمود الماس نکالے گئے ہیں انکے

تقاطع سے ایک متوازی الاضلاع پیدا ہوتی ہے اگر اقطار مزدوج میں سے ایک کی طرف کی زاویہ

کو تعبیر کریں تو ثابت کرو کہ قریب سطح متوازی الاضلاع کا

(۵۵) ایک مربع معلوم کے چاروں کونوں پر ایک دائرہ گذرنا ہے اور دوسرے درجہ کے خطوط منحنی

گذرتے ہیں اور ماس مشترک دائرہ اور ہر ایک منحنی کے گزے ہیں تو مقام النقاط ہر خط منحنی کے

نقاط تماس کا جو اسکی اپنی ماسوں کے ساتھ ہوتا ہے دریافت کرو

(۵۶) ایک بضوی سے باہر ایک نقطہ ہے اور اسے دو ماس سے اورت ق کیجے گئے ہیں

تو ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے مرکز پر ایسا کیج سکتا ہے کہ جو ص ع اور ص ق اور

ہ ق کو مس کرے یا ان خطوط محدودہ کو مس کرے

اگر لا اور ع محدین نقطہ کے ہوں تو ثابت کرو کہ نصف قطر دائرہ کا

(ط لک + ص لک - د لک)

بند برہان باب

(۳۱) پانچ نقطہ ہیں جن کے تین ایک خط مستقیم میں ہیں اور دو پر گزرتی ہو صرف ایک ہی تراش مخروطی بن سکتی ہے۔
فرض کرو کہ پانچ نقطہ ہیں سے دو نقطہ پر محور لگا گزرتا ہی اور باقی تین سے دو پر محور لگا گزرتا
اور فرض کرو کہ اول دو نقطہ کے بعد مبدی سے ح اور ج جدا گانہ ہیں اور دوسرے دو
نقطہ کے بعد مبدی سے ق اور ق م جدا گانہ ہیں اور باقی نقطہ کے محدین ح اور ق میں موافق
دفعہ ۲۹ کے فرض کرو

(۱) $\text{ط لک} + \text{ص لک} + \text{س لک} + \text{د لک} + \text{ی لک} + ۱ = ۰$
ساوات اوس تراش مخروطی کی جو پانچون نقطہ پر گزرتا ہے خط مخفی نقاط (ح و د)
(د ح م و) پر گزرتا ہے تو (۱) یہ ہوگی

(۲) $\text{ل ح} + \text{د ح} + ۱ = ۰$

(۳) $\text{ل ح م} + \text{د ح م} + ۱ = ۰$

اور علی ہذا القیاس چونکہ خط مخفی (وق) و (وق م) میں گزرتا ہی تو ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے

(۴) $\text{س ق} + \text{ی ق} + ۱ = ۰$

(۵) $\text{س ق م} + \text{ی ق م} + ۱ = ۰$

اور چونکہ خط (ح وق) پر گزرتا ہی تو ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

(۶) $\text{ل ح} + \text{ص ح} + \text{ق ح} + \text{س ق} + \text{د ح} + \text{ی ق} + ۱ = ۰$

(۲) اور (۳) سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$\text{ط} = \frac{\text{ل ح} + \text{ص ح}}{\text{ح}}$ اور $\text{د} = \frac{\text{ل ح} + \text{ص ح}}{\text{ح}}$

(۲) اور (۵) سے ہم کو دریافت ہوتا ہے کہ

$\text{س} = \frac{\text{ق ل} + \text{ق ی}}{\text{ق}}$ اور $\text{ی} = \frac{\text{ق ل} + \text{ق ی}}{\text{ق}}$

پس (۶) سے ہم قیمت ص کی تحقیق کرتے ہیں چونکہ اسی سی میں تین نقطے ایک خط مستقیم میں نہیں

ہیں تو کوئی مقدار تقدیر ح د ح م وق وق م د ح مین صفر نہیں ہو سکتے اسے معلوم ہوا

کہ اشال ط و ص و س و د کی قیمتیں محدود ہیں اگر ان قیمتوں کو (۱) میں رکھیں تو ایک

ساوات اوس تراش مخروطی کی حاصل ہوگی جو پانچ نقطہ پر گزرتی ہے اور چونکہ مقدار

ط و ص و س و د و ی کی صرف ایک قیمت ہی ہے معلوم اگر صرف
ایک ہی تراش مخروطی ہے جو ان سطح نقطون پر گذرتی ہے
(۳۲) جب تین نقطے ایک خط مستقیم میں ہوں تو یہی دفعہ گذشتہ کی تحقیقات بکار آ رہی ہو سکتی ہے
مثلاً نقطہ (ح و ق) اس خط مستقیم واقع ہو جو (و ق) و (ح د) میں ملایا جا
اس صورت میں نہ بیضوی نہ قریب البیضوی نہ بعید البیضوی ان نقطون پر گذر سکتی ہیں کہ چونکہ یہ
خط ماضی ایسے قسم نہیں ہو سکتی کہ ایک خط مستقیم او کو دو نقطوں سے زیادہ نقطوں پر قطع کرے
پس سطح تراش مخروطی کی تحویل دو خطوط مستقیم کی طرف ہو جائیگی یعنی ایک خط وہ ہوگا جو تین نقاط
مذکور گذر تباہی اور دوسرے خط وہ ہوگا جو باقی دو نقطوں پر ملے گا لیکن اگر چاہے نقطے ایک خط مستقیم
ہوں تو دفعہ گذشتہ کی ترکیب عمل میں نہیں آ سکتی یہ ظاہر ہے کہ ایک زوج خطوط مستقیم سے زیادہ تراش
نقاط پر گذر سکتی ہیں

(۳۳) اب ہم فائدہ مند صورتیں مساوات تراشہای مخروطی کی بیان کریں گے جنہیں دفعہ گذشتہ کی کوئٹ
گذرتی ہیں یا اسکی ضلع کو مس کرتی ہیں
فرض کرو کہ $ل = م = ن$ اور $م = ل = ن$ اور $م = ل = ن$ مساواتیں تین خطوط مستقیم کی ہوں جو آپس میں ملے ہیں
اور شلٹ بنانی میں مساوات

ل م ی + م ی ل + ن م و = م و ن + م و ل + م و ی
جسمین ل اور م اور ن بقادیر متساوی ہیں اس تراش مخروطی کی کوئٹ جو شلٹ کے گرد بنائی جاتی ہے اور
ل اور م اور ن کی مناسب قیمتوں مقرر کرنے سے اور پر کی مساوات ہر تراش مخروطی کو تعبیر کر سکتی ہے
جو شلٹ کے گرد بنایا جائے اب ہم سکون ثابت کرتی ہیں

اول مساوات (۱) دوم درجہ کی ہے جسمین بقادیر متغیر ل اور م اور ن اور یہ ل اور م اور ن اور
م اور م کے حلوں میں واقع ہوتی ہیں اسے ثابت ہوا کہ مساوات (۱) کسی تراش مخروطی کی
مساوات ہی

دوم ل اور م کی اوقعتیوں سے جو ایک ہی وقت میں $م = ل = ن$ اور $م = ل = ن$ کو بناتی ہیں شرائط مساوات
(۱) کی پوری ہوتی ہیں اس لیے تراش مخروطی خطوط $م = ل = ن$ اور $م = ل = ن$ کے نقطہ تقاطع پر گذرتی ہیں

اور اس طرح تراش مخروطی خطوط می = ۰ اور مو = ۰ کی نقطہ تقاطع پر گزرتی ہی اور لو = ۰ اور یہ سو = ۰ کے نقطہ تقاطع پر ہی گزرتی ہے اسے معلوم ہوا کہ جو تراش مخروطی (۱) سے تعبیر ہوتی ہے اور مخروط کے نقاط تقاطع پر گزرتی ہے جو لو = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰ سے تعبیر ہوتی ہیں سو م ل اور م اور ن کی مناسب قیمتوں کی تقرر کرنی سے مساوات (۱) تراش مخروطی کو تعبیر کر سکتی ہے جو مثلث کی کرہ بنائی جا اسوٹے کہ فرض کرو کہ کسی ایک تراش مخروطی معلوم کو تعبیر کرتی ہے جو مثلث کے گرد بنائی جا ص پر دو نقطے مقرر کرو جنہیں سے ایک نقطہ کے محدین ج اور ق ہوں اور دوسرے نقطہ کے محدین ج م اور ق ہوں اگر ہم اول مساوات (۱) میں بجائے ل اور م کے ج اور ق ل رکھیں اور پھر ج م اور ق م رکھیں تو ہم کو دو مساواتیں حاصل ہوں گیں جسے کہ قیمتیں ل اور ق کی دریافت ہوں گیں فرض کرو کہ $\frac{ل}{م} = \frac{ع}{و}$ اور $\frac{ل}{م} = \frac{ک}{ن}$ کہ ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں رکھو تو اسکی صورت یہ ہو جائیگی کہ

$$\text{موتق} + ع می + و + ک لومو = ۰ \quad (۲)$$

پس یہ مساوات اس تراش مخروطی کی ہی جو پانچ نقطے مشترک کے ساتھ رکھتی ہی یعنی تین تو مثلث کو نوٹ کے نقطے اور دو نقطے (ج اور ق) اور (ع اور و) اسوٹے تراش مخروطی ص موجب دفعہ اس کے منطبق تراش مخروطی (۲) پر ہونی چاہئے پس سے دعوی ہمارا ثابت ہوا مساوات (۱) میں بجای مقدار مستقل کے ہم واحد رکھ سکتی ہیں لیکن اور زیادہ صورت بالقرینہ (۱) کی یہ لیتی ہیں کہ

$$\frac{ل}{م} + \frac{و}{م} + \frac{ک}{ن} = ۰$$

(۳) دفعہ گذشتہ کی مساوات (۱) اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ

$$می (ل + م + و) + ن لومو = ۰$$

اب ہم یہ دریافت کریں گے کہ (۱) کہاں اور خط مستقیم ہے مٹی ہی جسکی مساوات (۱) کے

$$ل + م + و = ۰$$

(۲) اور (۱) کو مرکب کر کے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ $ل + م + و = ۰$

اس واسطے $یو = یامو = ۰$

ان فرضوں میں کسی ایک کو لین اور مساوات (۲) کو کام میں لائیں تو ہم یہ دیکھتے ہیں کہ فرض ثانی بھی قائم رہتا ہے اسے معلوم ہوا کہ خط (۲) خط مخفی (۱) سے صرف ایک نقطہ پر ملتا ہے یعنی نقطہ تقاطع $لو = ۰$ اور $یو = ۰$ پر

اسے معلوم ہوا کہ (۲) ماس (۱) کا اس نقطہ پر ہے اور اس طرح $م می + ن یو = ۰$ ماس (۱) کا نقطہ تقاطع $می = ۰$ اور $یو = ۰$ پر ہے اور $لیو + لی می = ۰$

ماس نقطہ تقاطع $لو = ۰$ اور $می = ۰$ پر ہے

(۳۵) دفعہ گذشتہ کا اثبات ناقص اور ناتمام ہی ہوا ہے کہ بموجب دفعہ ۳۳ اور ۳۴ کے ایک خط متوازی محور قریب البیضوی کا یا خطوط متعلق الملاقات بعید البیضوی میں سے کسی ایک خط کا متوازی خط مخفی سے صرف ایک نقطہ پر ملتا ہے مگر اس کا ماس نہیں ہوتا اس واسطے ہمارا دعویٰ اس طرح ثابت ہوتا ہے کہ محور لا کو منطبق خط $لو = ۰$ پر مقرر کر تو یہ ہو جائیگا کہ $اسمین ق کو می$ مقدار مستقل ہے اور محور کو بھی منطبق خط $لو = ۰$ کے ساتھ مقرر کر تو ہو جائیگا کہ $اسمین ع$ ایک مقدار مستقل ہے

اور فرض کرو کہ $می = لا + ب + س$ تو مساوات (۱) دفعہ سابق کی پیروی جائیگی کہ

$$(لا + ب + س) (ل ع + لا + م ق) + ن ع ق لا = ۰$$

اور بموجب دفعہ ۳۳ کے مساوات ماس کے سبب یعنی $لا = ۰$ اور $س = ۰$ کے نقطہ تقاطع پر

$$ل ع لا + م ق س = ۰$$

(۳۶) دفعہ ۳۴ میں جن ماسوں کا بیان ہوا ہے فرض کرو کہ وہ بڑھائی جائیں اور خطوط

$لو = ۰$ اور $می = ۰$ جنسی کہ شلٹ بنائیں تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ تینوں نقطے

تقاطع کے اوس خط میں واقع ہوتے ہیں جس کے مساوات یہ ہیں کہ

$$ل ع + م ق + م ج = ۰$$

آسی تراش مخروطی معینہ کو نہیں تعبیر کیگی اگر تین خطوط استقیم متوازی ہیں تو اوپر اور میانی کی صورت ہوگی

ل + م + ع اور ل + م + ع اور ا ل + م + ع

اور مساوات کی صورت یہ ہو جاتی ہے کہ

مر (ل + م ی) + لب (ل + ل + م ی) + مر =

یہ دو خطوط توازیہ کو تعبیر کرتی ہیں اور ہر واسطے کسی تراش خرومی معینہ کو نہیں تعبیر کرتی۔

ان ششوی صورتوں کے مسئلہ علی العموم معجم ہی اب ہم اوسکا اثبات ایک اور طرح سے لکھتے ہیں

چونکہ خط استقامت موازی نہیں ہیں اس لئے ان میں سے ضرور دو ملینے فرض کرو کہ یوں ہو۔

یہم دو خط ہوں اوئی سمتوں کو محور اور لجد اگانہ مقرر کرو = کی صورت لاء = اور ہو =

کئی = ۰ ہو جائیگی اور نیز می = ۰ ہوگی ل ل د + م + ز + ن = ۰ لے لکھ سکتی ہیں یہ باب

ہم کو یہ ثابت کرنا ہے کہ

الله + ب + س (ل + م + ن) + ر (ل + م + ن)

م + ب (ل + م + ن) + س ل = (۱)

۱۱ اور ب وغیرہ کی مناسب قیمتوں کے مقرر ہونے سے کسی ترانہ اشخروطنی معینہ کو ایسا ہوا تبصرہ کرتی ہے جس کے متعلق

طالک + ص لدر + س ر + د ل + آ می کف = (۲)
که ت ر ش م ز ط م ع ک ر م ا ا م م (۱) م ا ق ا م ک ا ت ت ل ک م ا (۱) ا (۲)

کسی ترانس مجروحی عینہ کی مساوات ہی (۱) میں ارقام کو با الکریم ہو اور (۱) اور (۲) کے اشارے متناظر کو مساوی لکھتے تو

لی امتثال مناسطہ کو سامنے رکھ کر

س ن = ف اور گ ن + س م ن = ی اور ب ن + س ل ن = د

ب + سی + م + ر + ل = م + ر + ل + سی + ل + ر + م = ل = ط

س ل م + ل + ب م + م = ص

ان ساءالوں کے اسواثر سے لاؤ بے اور بے لاؤ سے جھٹکتے ہوئے ہیں

اور خط و معلوم ایک اعظم برہین کے واسطے ان کفر بہین کے معلوم ہوا کہ میتین جس

۱) دریافت ہونے والی رقم محدود اور معین ہونے لیں پس (۱) کا (۲) پر مطبق ہونا

ہوا اور دعویٰ ہمارا ثابت ہوا

(۹۲) شلتھ کے اضلاع کو جو تراش مخروطی میں کر کے اسکی مساوات دریافت کرو

فرض کرو کہ $ل = ۰$ اور $م = ۰$ اور $می = ۰$ مساوات میں اضلاع شلتھ کی ہوں تو ہر ایک تراش مخروطی میں مساوات سے تعبیر ہو سکتی ہے کہ

$$(۱) \quad ل + ۰ + ب + ۰ + س + می + ۰ + ا + ۰ + موی + ۰ + ب + می + ۰ + س + ۰ + موی = ۰$$

تراش مخروطی جس مقام پر خط $ل = ۰$ کو قطع کرتی ہے اس مقام کے دریافت کرنے کے واسطے $ل = ۰$ کے کہیں تو مساوات (۱) کی یہ صورت ہو جائیگی کہ

$$(۲) \quad ب + ۰ + س + می + ۰ + ا + ۰ + موی = ۰$$

اب مساوات (۲) کے حل کرنے سے دو قیمتیں میج حاصل ہوتی ہیں

میج = $ل$ اور میج = $ل$ کی مقرر کرو تو مساوات $موی = ل$ می اور خط کی مساوات کو تعبیر کر لگی جو نقطہ تقاطع $موی = ۰$ اور $می = ۰$ پر گذرنا ہی پس اس سبب کہ مساوات (۱) کی شرائط لہ اور $م$ کی اوقع تینوں پر ہی ہوتی ہیں جو ایک ہی وقت میں $ل = ۰$ اور $موی = ل$ می = ۰ باقی ہیں تو اسے معلوم ہوا کہ تقاطع خطوط $ل = ۰$ اور $موی = ل$ می = ۰

ایک نقطہ (۱) پر ہے اور اس طرح تقاطع $ل = ۰$ اور $موی = ل$ می = ۰ کا ایک نقطہ (۱) ہے پس معلوم ہوا کہ خط $ل = ۰$ (۱) سے دو نقطوں پر ملے گا اور سب سے دو ماس نہیں ہو گا بلکہ خط $ل = ۰$ اور $موی = ل$ می = ۰

منطبق ہوتے ہیں اسے معلوم ہوا کہ $ل = ۰$ (۱) کو اس حالت میں کر لیا کہ

$ل = ۰$ اور $موی = ل$ می = ۰

علیٰ ہذا القیاس $م = ۰$ (۱) کو اس حال میں کر لیا کہ $م = ۰$ (۱) اور $می = ۰$ (۱) کو اس حال میں کر لیا کہ $س = ۰$ (۱) ان تین ارتباطات سے یکو یہ دکھائی دیتا ہے کہ علامت $ل$ اور $م$ کی مثبت فرض ہو سکتی ہے کیونکہ حاصل ضرب ہر ایک دو کا مثبت ہے اور نیز علامت $ل$ اور $م$ اور $می$ کی منفی ہی فرض ہو سکتی ہے کیونکہ اگر ایک انہیں سے منفی ہو تو مساوات (۱) ہر ایک رقم کی علامت بدل دین اور مثال $ل$ اور $موی$ اور $می$ کو مثبت بنالین اس واسطے یکو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

۱ = ل اور پ = م اور س = ن

پس $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

اسے (۱) کی صورت میں ہو جائے کہ

لَا تَكُنْ مِمَّنْ يَدْعُو بِهِ قَوْمُكَ بِغَيْرِ فَحْشٍ يُعْتَبَرُ بِهِ وَلَا لِمَنِ الْمُلْكُ يَوْمَ يَأْتِي السَّاعَةَ (٢٠)

اس جگہ میں جو غلط فہمیاں مشتبہ واقع ہو رہی ہیں اب ہم ان کی تحقیقات کرتے ہیں

اول فرض کرو کہ اوپر کی علامتیں ای جابین تو مساوات سطح لکھی گئی کہ

(ال ل و + هم سو + ن می) = .

یہ مساوات ایک خط استقیم کی ہے، یاد و خط استقیم منطق کی

و وہم فرض کرو کیسے کی علامت دو دفعہ کی جاے اور کوپر کی علامت ایک دفعہ تو اس میں
تین جانتیں ہوگی

(ل+و+م-م+ن می) = - یا (ل-و-م+ن می) = -

یا (س ل و + م و + ن ی) = .

برکات مساوات سے دو خط مستقیم منطبقہ تعمیر ہوئے ہیں

سوم چنانکہ اول اور دوم صورت خط و استقامت کو تعبیر کرتی ہی تو ان صورتوں کو مساوات (۳)

خارج کر کے تو یہ ظاہر ہو گا کہ اگر خط انحنی دوسرے درجہ کا خط مستقیم

لو = اور لمو = اور می =

کو مس کرتا ہی تو مساوات کی صورت ان صورتوں میں سے ایک ہوگی

(۴) کلو + م نو + ن می - ا م ن موسی - ن ل می لو - ا ل م موسی = .

(۵) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

(۶) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

۱) کوک + مامو + نای + امن مومی + سن لی لو - رالم نمبو = (۷)

یہ چار صورتیں اس طرح بھی لکھی جاتی ہیں

(۴) سے مالو + مامو + مانمی = ۰

(۵) سے مالو + مامو + مانمی = ۰

(۶) سے مالو + مامو + مانمی = ۰

(۷) سے مالو + مامو + مانمی = ۰

عمل انتقال اور مجزور سے یہ مساواتیں ایسی صورت میں لکھی جاتی ہیں کہ وہ ناخط ہوں
(۳۱) یہ دعویٰ نہایت آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ خط منحنی جو مساوات

مالو + مامو + مانمی = ۰

سے تعبیر ہوتا ہے خطوط ۰ = اور مو = اور می = کو تقاطع نہیں کرتا اس واسطے کہ
فرض کرو کہ اوپر کی مساوات کی شرائط ایک نقطہ کے محدب سے یورپی ہیں تو یہ محدب دین ل و اور
م مو اور ن می کو تمام مثبت یا تمام منفی بنائے فرض کرو کہ ل و مثبت ہی تو ہو = ۰
کی دوسری جانب میں جو نقطہ ہوگا اس کے واسطے جملہ یو منفی ہوگا بس محدب دین ایسی نقطہ
کی مساوات کی شرائط کو پورا نہ کرے بشرطیکہ دو نوم مو اور ن می میں سے ہر ایک منفی ہی لیکن اگر
اگر خط منحنی خط ۰ = کو قطع کرتا ہے

تو ہو = کے دونوں طرف ایسی نقطے خط منحنی پر ہوں گے اور ہر ایک ممکن ہوگا کہ وہ کی علامت بغیر ل و اور
می کی علامت بدلنے کی بدل دیں گے معلوم ہوا کہ خط منحنی خط ۰ = کو نہیں قطع کر سکتا اور یہ طریقہ
وہ خطوط مو = اور لو = کو نہیں قطع کر سکتا

اور یہ طریقہ ثابت ہو سکتا ہے کہ خطوط منحنی معادلات (۹) (۱۰) و (۱۱) دفعہ گذشتہ کی خطوط

۰ = اور مو = اور می = کو نہیں قطع کرتے

(۳۱) دفعہ ۳۹ میں معادلات (۵) و (۶) و (۷) کی صورتیں (۴) سے معادلات

ایک علامت بدل کر استخراج ہو سکتی ہیں مثلاً (۵) کے اس طرح استخراج کریں کہ علامت کی بدل

دفعہ آئیدہ میں ہم (۴) کا استعمال کریں گے اور اس کو مساوات تراش مخروطی کی جو اصل حالت
کو مس کرتی ہے خیال کریں گے ہم (۵) و (۶) و (۷) میں کسی ایک کو کام میں لاسکتی ہیں
دفعہ آئیدہ میں ہم ایک صورت بتلائیں گے جس میں یہ ضرور ہوگا کہ صورتیں تین کریں دفعات ۳۱، ۳۲، ۳۳
(۳۱) مساوات (۳) دفعہ ۹ کو اس طرح لکھ سکتی ہیں

(۱) (ل-یو-م سو) + ن می (ن می-م سو-ل سو) =

اگر ہم اسکو می = کے ساتھ شامل کریں تو ہم کو یہ استنباط ہوگا کہ

ل یو - م مو = (۲)

اب ہم معنی اخر مساوات کے بیان کرتے ہیں وہ اوس خط کو تعبیر کرتی ہیں جو یو = . اور یو = . کے تقاطع میں گزرتا ہے اور اوس نقطہ پر یہی گزرتا ہے کہ جس پر یو = . خط ختمی (۱) سے ملتا ہے دفعہ ۴۴ کے طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

(۳) لی - ر م بو - ز ل و = .

(۱) کاماس دوسرے نقطہ پر ہے جبکہ (۲) اسے ملتا ہی

علیٰ بن ابی القیس ہم معنی ان سنا و انوں کی بیان کر سکتے ہیں کہ

(۴) ام مو - ن می = .

(۵) لہو - آن می - آم می =

(۶) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(۴) موم - آل = ۲ ن می =

مکمل - ۲ - ۱ = ۱
نقاط (۳) کا می = کے ساتھ اور (۵) کا یو = کے ساتھ اور (۷) کا مو = کے ساتھ
۱ لو + ۲ مو + ۱ می =

یہ واقع ہوگا
 $\text{خط ل ب و} + \text{م و} = \text{تقاطع ل و} + \text{م و} = \text{پرگزہ ناہی اور نیز (۳) اور می} =$

تقاطع نیز گذرنا ہی اس سببے اوستا مقام معلوم ہوتا ہے
 علامہ القاسم م + ن می = . اور ن می + ل = و . کے معنی بیان ہو سکتی ہیں

(۳۱۳) شلت کے اور وجود اترہ نیلیا جاے او سکی ساوات دریافت کرو

اس دفعہ اور آئندہ کی دودھ فحش میں اس صورت کا استعمال آسانی کے واسطے فائدہ مند ہو گا کہ

لـ جـ مـ عـ + رـ جـ بـ عـ = عـ

[illegible]

فرض کرو کہ $h = 0$ اور $b = 0$ اور $r = 0$ ۔ مساواتیں اخذ کرنے کے لیے h اور b اور r کو صفر قرار دیا جائے گا۔

(۱) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ ۔
 تراش مخروطی کو تعبیر کریں گی جو مثلث کے گرد بنائی جائے اور $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ کی مناسب قیمتوں کے
 مقرر کرنے سے مساوات کی صورت ایسی بن سکتی ہے کہ وہ اوس دائرہ کو تعبیر کرے جس کو ہم موافق علم
 ہند کے مثلث کے گرد بنا سکتی ہیں اب ہم اس طرح عمل کریں کہ (۱) میں $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{6}$ کو
 جملوں کو تعبیر کرتے ہیں مندرجہ کریں اور لاء کے اشال کو مساوی صفر کے لکھ دیں اور لاء کے
 کے اشال کو برابر ہونے کے اشال کی لکھیں تو ہم دو مساواتیں $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ کی تحقیق کر کے دیکھیں
 حاصل ہوں گیں اور ان قیمتوں کے موافق (۱) دائرہ مطلوب کو تعبیر کریں اس کو طالب علموں کی مشق
 کے واسطے چھوڑتے ہیں اور ہم ایک اور ترکیب لکھتے ہیں

(۱) کے ماس کی مساوات جو ہے = ۰ اور ب = ۰ کے تقاطع سے نکلا جائے
بموجب دفعہ ۳۴ کے ہے کہ

(۲) لرب + مقصه =

۴۔ صورت مساوات دائرہ لی پیہ ہونی چاہئے کہ

ما (ل) + ما (م ج) + ما (ن کر) =
 اسے معلوم ہوا کہ اگر اوس نقطہ پر خیال کریں جس پر دائرہ خط ہد = سے ملتا ہے ملافتی سبب سے
 یہ بہرہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\frac{ل}{م}}{\frac{م}{ن}} = \frac{\frac{ل}{م}}{\frac{م}{ن}} = \frac{ل}{ن}$$
 اور

$$\frac{\frac{ل}{م}}{\frac{م}{ن}} = \frac{ل}{ن}$$
 پس اسے ثابت ہوا کہ مساوات یہ ہے کہ

اسی طرح باقی دو دائروں کی مساواتیں لکھی جاسکتی ہیں

(۳۱۶) دفعات ۳۶۶ اور ۳۱۲ میں جو نیا سچو تراش مخروطی کے واسطے قائم ہوئے ہیں اوس دائرہ کے واسطے ہیں۔ قائم ہو سکتی ہیں جو شلت کے اندر اور گرد کچ کے ہیں صرف ہر قسم میں ل اور م اور ن کی وہ کام میں لانی جائے جو دفعات ۳۱۳ - ۳۱۵ میں دریافت ہوئی ہیں (۳۱۷) فرض کرو کہ ایک ذرا ربعہ الاضلاع سی اور اس کے ضلع ان و اتون کے تعبیر ہوتی ہیں کہ

تر = . ولو = . ومو = . ومی = .
تو مساوات ترلو + سگ مولو = .
جب میں کہ ایک مقدار مستقل ہے ایک تراش مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جو ذرا ربعہ الاصلہ
گردن بنائی جا کہ مساوات او س تراش مخروطی کو تعبیر کرتی جو اون چار نقطوں پر
گزر رہی ہے جو جدا گانہ ان مساواتوں سے تحقیق ہوتی ہیں

کس کی مناسب قیمت مقرر کرنے سے مساوات ایسی برکت رکھتی ہے کہ وہ کسی ترکش خوردگی کو

[illegible]

نذر جوان باب ۲۴۷ جو اوسنی نقطہ سی باقی مقابل کے اضلاع پر نکالی جائیں

ہم کو اس بات پر ہی توجہ کرنی چاہیے کہ علم ہندسہ میں جو معنی ذواربعہ الاضلاع کی لئی جاتے ہیں وہ سب سے پہلے
 میں وسعت کے ساتھ لگے جاتے ہیں ایسے اگر چار نقاط معلوم ہوں تو کم از کم تین مختلف ذواربعہ الاضلاع
 ان نقطوں میں خطوط وصل کرنے سے حاصل ہونگے شکل ۱ دفعہ ۱ کی لو اور فرض کرو کہ اوپر
 وہیں دو نقاط معلوم ہیں تو تین مختلف ذواربعہ الاضلاع ہیں یہ ہونگے (۱) وہ شکل جواب
 اوپر س اور س اور د اور د سے محدود ہیں (۲) وہ شکل جواب س اور س اور د اور د سے محدود ہیں اور
 ب اور س اور س اور د اور د سے محدود ہیں (۳) وہ شکل جواب س اور س اور د اور د سے محدود ہیں اور
 دو مثلثوں ج ب س اور ج د س سے مرکب ہی
 علیٰ ہذا تقیاس چار خطوط مستقیمہ معلوم کی تقاطع سے چار مختلف ذواربعہ الاضلاع ہیں جن کی ایک
 شکل دفعہ ۱ میں فرض کرو کہ خطوط معلوم کی اوری آ ب اور ا ج س اور ب ج د ہیں
 تو تین مختلف ذواربعہ الاضلاع ہیں

(۱) شکل ج ب س اور س اور د اور د سے محدود ہیں (۲) شکل ج ب س اور س اور د اور د سے محدود ہیں اور
 د اور د اور د اور د سے محدود ہیں (۳) شکل ج ب س اور س اور د اور د سے محدود ہیں اور
 محدود ہیں اگر چار خطوں کی مساواتیں یہ ہوں کہ

تر = لو = مو = می
 تو چار خطوں سے تین مختلف ذواربعہ الاضلاع نیکی اور پر جو تراشہای مخروطی بنائی جائیں
 او انکی تین مساواتیں یہ ہونگی کہ
 تر + لو + ک = می = تر + مو + ک = می = تر + می + ک = مو =

(۳۱۸) اب پھر اس مساوات پر خیال کرتے ہیں کہ
 یہ اوس تراشہ مخروطی کو تعبیر کرتا ہے جو اوس نقطہ پر گذرتی ہے کہ لو = اور می = سے تحقیق
 اور نیز اوس نقطہ پر ہی جو مو = اور می = سے تحقیق ہوتا ہے اور نیز خط لو = اور

مو = مین سے ہر ایک تراش مخروطی کو جہاں سے لکھا گیا اس کرنا ہی ہو اسطے کہ اگر ہم لو = کو اوپر کی مساوات کے ساتھ شامل کر لیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ می = ہی یعنی خط لو = خط منحنی سی الیکہ نقطہ پر لکھا ہی یعنی اوس نقطہ پر جس پر لو = اوری = تقاطع کرنا ہی اور اس طرح خط مو = خط منحنی کو مس کرنا ہی پس لو = اور مو = تراش مخروطی کے دو ماسوں کو تعبیر کرتی ہیں اور می = اون کے وتر تماس کو تعبیر کرتا ہی

اس طریقہ سے بھی ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ خط لو = خط منحنی کو نہیں قطع کر سکتا اس طرح کہ خط لو = کی ایک جانب میں تقاطع کے واسطی جملہ مثبت ہی اور خط کی دوسری جانب میں منحنی لکیر کی کی علامت متغیر نہیں ہوتی پس لو = خط منحنی کو قطع نہیں کر سکتا اور کے مساوات کی منحنی موافق علم ہندسہ کے یہ ہیں کہ تراش مخروطی کے کسی نقطہ سے جو عمود کہ اوسکی نوج ماسوں پر نکالی جائیں اوسکی حاصل ضرب کو نسبت بالکستقل اوس عمود کی مربع سے ہوتی ہی جو اوس نقطہ سے اون ماسوں کے وتر تماس پر نکالا جائے

(۳۱۹) مساوات $ل + لو = م + مو = ن + می$

تو اسکو اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ

$(ن می + م مو) = (ن می - م مو) = ل می$

اسے معلوم ہوا کہ موافق دفعہ سابق کے

$ان می + م مو = اور ان می - م مو =$

ماس اوس تراش مخروطی کی ہیں جو اوس مساوات سے تعبیر ہوتی ہی چونکہ دو ماس

مو = اوری = کے نقطہ تقاطع پر ملے ہیں اسلئے یہ نقطہ قطب یو = کا ہی

اسی طرح مساوات کو اس صورت میں بھی لکھ سکتے ہیں کہ

$(ن می + ل لو) = (ن می - ل لو) = م مو$

اور آنتیجہ یہ نکلتا ہی کہ لو = اوری = کا نقطہ تقاطع قطب مو = کا ہے

اسے یہ متنبظ ہوتا ہی کہ نقطہ تقاطع لو = اور مو = کا قطب می = کا ہے دفعہ ۱۹۱

(۳۲۰) یہ ایک خاص صورت دفعہ گذشتہ کی ہے کہ

$$۵۵ + ب = ن ل ر \quad \text{دیکھو دفعہ ۳۷}$$

فرض کرو کہ خطوط ۵۵ = . اور ب = . علی القیاس ہوں تو ۵۵ + ب نقطہ (لدو) کی بعد کا
اسے معلوم ہوا کہ اوپر کی مساوات اس تراش مخروطی کو تعبیر کرتی ہی جس کا خط منظم لو = . اور
نقطہ تقاطع ۵۵ = . اور ب = . کا ماسک ہے خطوط

$$ن ل ر = ۵۵ = . \quad \text{اور} \quad ن ل ر + ۵۵ = .$$

دو ماس تراش مخروطی کے ہیں جو اسکو اطراف و تر ماسک ب = . پیرس کرتے ہیں اور نیزہ خط
لر = . پر ہی ملتی ہیں اسے معلوم ہوا کہ و تر ماسک کی اطراف سی جو ماس نکالے جائیں وہ اس ماسک
کے خط منظم پر ملتے ہیں اور نیزہ ماس خط ۵۵ = . پر ہی ملتے ہیں اور یہ خط بموجب فرض کے
عمود ب = . پر ہے اسے معلوم ہوا کہ خط بموجب ماسک اور اون ماسوں کے نقطہ تقاطع میں
ملا یا جائے جو و تر ماسک کی اطراف سے نکالیں وہ عمود و تر ماسک پر ہوتا ہی ہوں
(۳۲۱) اگر لو = . اور می = . مساواتیں اون دو تراشہای مخروطی کی ہوں جو یا نقطوں پر
لو + می = . اس تراش مخروطی کو تعبیر کریگا جو جوارون نقاط تقاطع پر گذرتی ہو اسی قبیل کے

دعویٰ کی اثبات کے بعد اس دعویٰ کا اثبات ظاہر جائیگا

اگر می = . اور می = . مساواتیں دو خطوط استقیم کی ہوں تو

لو + می می = . اس تراش مخروطی کی مساوات کو تعبیر کریگی جو اون چار نقطوں پر

پر گذرتی ہی جہ خط می = . اور می = . تراش مخروطی لو = . سے ملتے ہیں

اور نیز لو + می می = . اس تراش مخروطی کو مساوات کو کریگی جو تراش مخروطی لو = .

اور خط می = . کے نقاط تقاطع پر گذرتی ہے اس تراش مخروطی کا ماس می ہی ہو گا جو
تراش مخروطی لو = . کا اس نقطہ پر ماس کے جہان لو = . اور می = . تقاطع کرتی ہیں

ہم پہلے ہی اس نتیجہ کی سوچی ہوئی تھی اور یہ سوچ یوں پیدا ہوا تھا کہ ہم فی مساوات

لو + می می = . کے معنی پر غور کی تھی اور خط می = . کا تقرب می = . کی ساتھ اور

یہ فرض کو منطبق ہونا خیال کیا تھا جس نقطوں پر لو = . می = . سے ملتا ہے اونہیں سے

پندر ہواں باب ۲۵۰ مساوات نراساں کر کے
ایک کو مبدا اور اور خط می = کو محور لے کا مقرر کر کے ہم اوپر کے مقدمہ کو جو بی ٹھیک ٹھیک
ثابت کر سکتی ہیں اس طرح لو کی یہ صورت ہو جائیگی کہ

وہ + بے لگ + میں + دل + می +

اور بموجب دفعہ ۲۸۳ کے ہم دیکھتے ہیں کہ

زلف + بلاد + اش + دل + می = .

اور لکڑ + پلاسٹک + سیمنٹ + دلدل + سیلاب + لکڑ =

کامبد، پر ایک ہی ماس ہے

اور نیز ل کی متناسب قیمت مقرر کرنی مساوات $l + l = m$ کو ایسا بنا سکتی ہیں کہ وہ l

در خط مستقیم کو تعمیر کرے جو تراش مخروطی ہو۔ کو اوئی قسطوں میں کرتی من جہان وہ خط

مستقیم می = کو قطع کرتی ہے یہ نتیجہ دفعہ ۲۹۳ سی بی نکل سکنا ہی مساوات می = . مساوی

اس مساوات کی ہی کہ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

اور مساوات کو =۔ مساوی نہ اس مساوات کی ہے کہ

$$= \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) + \text{لب لای}$$

پس $l =$ ا کے فرض کرنے سے ہو کر یہ حاصل ہوتا ہے کہ $l + m =$ لب لہر اور m اوٹ

۵ = اونی دو ماسون کو قبیر کرتی ہی جو تراش بخروٹی لے = کو اونی نقون پیرس کر تین

جہاں اس کو خط مستقیم ہی = کے قطع کرتا ہے

(۳۲۲) پاسکل کا مسئلہ تر آتش مخروطی کے اندر جوہر بس بنایا جاوے گی مقابلہ صواع

قانون نقاط تقاطع ایک خط استقیم میں ہونگے

فرض کرد کہ نف = . اور صنف = . اور تر = . و لو = . و مو = . و می = .

مسافر تین اوس مسدس کی اضلاع کی ہون جو تراش مخروطی ص = ۰ میں بنایا جاتی

رضو کہ جس ایک جہد خطا = سی دوا سی ذوارقبہ اللہ ضلوع میں تقسیم کیا جاوے

کے جن میں سے ایک اصطلاح وہ خط جو حرف اور صفت اور تراویز کو برابر صفر کے کہنے سے حاصل

اور دوسرے کے اقصاء وہ خط ہوں جو نوامی و مرکب برابر صفر کے لکھنے سے حاصل ہوں

اب ہم کو معلوم ہے کہ اگر ط و ص و ل و م خاص مقادیر متعلقہ ہوں تو مساوات تراش مخروطی کی
ان صورتوں میں لکھی جا سکتی ہے کہ

$$\text{ط ص ف م} + \text{ص ل ف ت} = \text{ل م م ر} + \text{م ل م ی} =$$

اسی طرح ط ص ف م + ص ل ف ت اور ل م م ر + م ل م ی سے ہر ایک متعلقہ ص کے ساتھ ہر ایک
اسی طرح

$$\text{ط ص ف م} + \text{ص ل ف ت} = \text{ل م م ر} + \text{م ل م ی}$$

$$\therefore (\text{ط ص ف} - \text{ل م}) = (\text{م ل م ی} - \text{ص ل ف ت})$$

اب بائیں طرف کارکن مساوات کا ان چار صورتوں میں محدود ہو جاتا ہے جب ل و اور ل و ایک ہی
وقت میں محدود ہوں اور جب ل و اور ل و ایک ہی وقت میں محدود ہوں اور جب ل و اور ل و ایک ہی
وقت میں محدود ہوں اور جب ل و اور ل و ایک ہی وقت میں محدود ہوں اور جب ل و اور ل و ایک ہی
کی ہے، اسی طرح بائیں طرف کارکن بھی ان چاروں صورتوں میں جاتے ہیں کہ محدود ہوں یعنی
اوسکی دو اجزاء ضربی مر اور (ط ص ف - ل م) میں سے ایک چاروں صورتوں میں ہر ایک میں محدود ہو

لیکن جو نقطہ ل ف = اور م ی = تحقیق ہوتا ہے اور جو نقطہ م ر = اور ل و = سب تحقیق ہوتا ہے

ان دونوں نقطوں میں جو خط ملتا ہے اوسکو م ر = کے ازروی عمل کے تعبیر کرتا ہے اسے ہم کو معلوم ہوتا ہے

کہ ط ص ف - ل م = ایک خط ہے جو ل و = اور ل ف = کے نقطہ تقاطع اور ت ر = اور

م ی = کے نقطہ تقاطع میں وصل ہوتا ہے لیکن خط ص ف - ل م = بظاہر نقطہ تقاطع

ص ف = اور م ر = پر گزرتا ہے اس واسطے تین نقطے جو جدا گانہ مساواتوں

ل و = اور ل ف = اور ت ر = اور م ی = اور ص ف = اور م ر = سے معین ہوئے ہیں

ایک خط مستقیم میں واقع ہوتی ہیں

اس بات پر خیال کرنا چاہئے کہ اگرچہ نقطوں میں مختلف طریقوں سے خطوط وصل کے جائز ہیں

شکلیں پیدا ہوں گیں اسکو ذہنیہ الذہن کے کہنے کے پس اگر تراش مخروطی میں چہرہ نقطہ

معلوم ہوں تو ناسکھ کا ضابطہ سادہ دفعہ استعمال میں آئیگا

(۳۲۳) فرض کرو کہ ص ف = مساوات ایک تراش مخروطی کی ہو اور

لو = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰

ساواتین میں خطوط استقیم کی ہوں تو

صف - ل ل تو = ۰ اور صف - م م تو = ۰ اور صف - ن ن تو = ۰

دوسرے درجہ کے خطوط منحنی کو تعبیر کرتے ہیں جو تراشش مخروطی مخروطہ کو مس کرتی ہیں اور ان میں سے
می اور ل اور م اور ن کو مناسب طور پر منتخب کر کے آخر میں ساواتوں میں سے ہر ایک کو تعبیر کرنے کے لئے
اوس زوج خطوط کا بنا سکتے ہیں جو صف = ۰ کو مس کریں دفعہ ۲۱ کو دیکھو جس اکثر تراشش

مخروطی صف = ۰ کے گرد مس دس بنایا جائے تو مساواتیں

صف - ل ل تو = ۰ (۱) صف - م م تو = ۰ (۲) صف - ن ن تو = ۰ (۳)

مس دس کے چہرہ اضلاع کو تعبیر کرنیوالی بنا سکتی ہیں

اب (۱) اور (۲) کو مرکب کرنے سے ہم کو

صف - ل ل تو - (صف - م م تو) = ۰ یا (م م - ل ل) (م م + ل ل) = ۰ (۴)

اوس زوج خطوط کے واسطے حاصل ہوگا جو (۱) اور (۲) کے نقاط تقاطع پر گذرتے ہیں

علیٰ ہذا القیاس (ن م - م مو) (ن م + م مو) = ۰ (۵)

اوس زوج خطوط کو تعبیر کرتا ہی جو (۲) اور (۳) کے نقاط تقاطع کے درمیان گذرتا ہی

(ل یو - ن می) (ل یو + ن می) = ۰ (۶)

اوس زوج خطوط کو تعبیر کرتا ہے جو (۳) اور (۱) کو تعبیر کرتا ہے

چہرہ خط جو اس طرح حاصل ہوئی ہیں ان کو چار صغوں میں اس طرح مرتب کرتے ہیں کہ

ہر ایک صف میں وہ میں خط آئیں جو ایک نقطہ پر ملتے ہیں یعنی

م م - ل ل تو = ۰ ن م - م مو = ۰ ل ل - ن می = ۰

م م + ل ل تو = ۰ ن م + م مو = ۰ ل ل + ن می = ۰

م م - ل ل تو = ۰ ن م - م مو = ۰ ل ل + ن می = ۰

م م + ل ل تو = ۰ ن م + م مو = ۰ ل ل + ن می = ۰

یہ نتیجہ مطابق برہمچریا کے مسئلہ کے مطابق ہے کہ اگر تراشش مخروطی کے گرد مس دس بنایا جائے

تو اس کی تین طرحوں متقابل کے زاویوں میں ملائی جائیں ایک نقطہ پر ملنے لگے
 اس واسطے کہ فرض کرو کہ تراشش مخروطی کے گرد ایک مس میں بنایا جائے اور اس کے کونوں کے
 نقطے Δ و β و γ و δ سے تعبیر ہوں تو Δ و β و γ و δ میں مناسبت
 انتخاب کر کے ہم مساوات (۱) کو خطوط $\Delta\beta$ اور $\delta\gamma$ کا تعبیر کریں والا اور مساوات (۲) کو خطوط
 $\beta\gamma$ اور $\delta\gamma$ کا تعبیر کریں والا اور مساوات (۳) کو خطوط $\Delta\gamma$ اور $\delta\beta$ کا تعبیر کریں والا
 بنا سکتے ہیں اب ہم اس بات کا امتحان کرتے ہیں کہ مساواتیں (۱) اور (۲) اور (۳) کی
 کوئی خطوط تحقیق ہوتے ہیں مساوات (۱) سے وہ دو خط تحقیق ہوتی ہیں جو ان خطوں کے
 نقاط تقاطع پر گزرتے ہیں جو (۱) اور (۲) سے تحقیق ہوتے ہیں اور Δ و β کی علامتیں
 ہماری اختیار میں ہیں ہم ان کو ایسا مقرر کر سکتے ہیں کہ $\Delta = \beta$ ۔ خط $\Delta\beta$ کو تعبیر کر کے
 تو $\Delta = \beta$ ۔ اس خط کو تعبیر کر لیا جو $\Delta\beta$ اور $\delta\gamma$ کے نقطہ مشترک اور $\beta\gamma$
 اور $\delta\gamma$ کے نقطہ مشترک میں ملا یا جائے اور علیٰ ہذا القیاس علامت Δ کی یہ بھی ہماری اختیار
 میں ہے تو ہم اس کو ایسا مقرر کر سکتے ہیں کہ $\Delta = \beta$ ۔ خط $\Delta\beta$ کو تعبیر کر کے
 $\Delta = \beta$ ۔ اس خط کو تعبیر کر لیا جو نقطہ مشترک $\Delta\beta$ اور $\delta\gamma$ اور نقطہ مشترک
 $\beta\gamma$ اور $\delta\gamma$ میں ملا یا جائے (۴) سے جو دو خط تعبیر ہوتے ہیں ان میں سے ایک $\Delta\beta$ ہے
 اور دوسرا وہ خط ہی جو نقطہ مشترک $\Delta\beta$ اور $\delta\gamma$ اور نقطہ مشترک $\beta\gamma$ اور $\delta\gamma$ میں
 ملا یا جائے لیکن یہ بات ظاہر نہیں ہے کہ ہم کس طرح سے اکثر تین ان دو خطوں کے درمیان کر کے
 اس واسطے برہنہ کا مسئلہ بودا ہی اور اس کا اثبات خاطر خواہ کامل نہیں ہے اس واسطے اس
 مسئلہ کا اثبات ایک اور لکھتے ہیں جو بالکل کے مسئلہ سے مستنبط ہوتا ہے
 موافق سابق کے فرض کرو کہ مس کے کونوں کے نقطے Δ و β و γ و δ سے تعبیر کریں
 تراشش مخروطی اور مساوی $\Delta\beta$ اور $\delta\gamma$ کے نقاط تماس میں خط گذرنا ہوا کہچھ اور تراشش
 مخروطی اور مساوی $\delta\gamma$ کے نقاط تماس میں خط گذرنا ہوا کہچھ اور فرض کرو کہ ان

دو قوسوں میں نقطہ مشترک سے ہی قوس قطب بی کا ہی دفعات ۳۰ او ۱۲۰ او ۱۸۹ کوڑ ہو
اور بی طرح سے ہم سن کا قاطعین کے تعبیر ہو اور لا کا قطب جو ر سے تعبیر ہو تحقیق
کر سکتے ہیں اور بموجب پاسکل کے مسئلہ کے ع اور ق اور ہ ایک خط مستقیم میں واقع ہیں اس
معلوم ہو کہ س ف اور بی اور لا ایک نقطہ پر ملتے ہیں یعنی او س نقطہ بی و قطب
ع ق رکا ہی دفعہ ۲۹۱ دیکھو جس طالب علم کو زیادہ شوق اس مضمون کے دیکھنی کا ہو وہ سال میں
تراشہبا مخروطی کے رسالہ کو دیکھی

مثالین

(۱) اگر $ط - س : ط - س :: ص : ص$ تو ثابت کرو کہ ایک دائرہ دو تراش مخروطی

$$ط لا + ص لا + س لا + س لا + د لا + ی لا + ف =$$

$$ط لا + ص لا + س لا + س لا + د لا + ی لا + ف =$$

کے نقاط تقاطع پر گزرتا ہوا کجی سکتا ہی اور نیز وہ شرط یہی دریافت کرو کہ ایک قریب البیضی

مید پر اور ان دو تراشہبا مخروطی کے نقاط تقاطع پر بی گزرتے

(۲) دو تراشہبا مخروطی کے محور کلان علی القوام میں تو ثابت کرو کہ دائرہ او کے نقاط تقاطع پر

(۳) مساواتیں دو تراشہبا مخروطی کی ہیں کہ

$$لا + ۲ ب لا + س لا + س لا + ۲ لا =$$

$$ط لا + ۲ ص لا + س لا + س لا + ۲ ط لا =$$

تو ثابت کرو کہ خطوط جو او کے نقاط تقاطع اور بی میں ملا جائیں ایک دوسرے پر عمود ہوں گے

(۴) ایک بیضی بعید البیضی کے متعلق الملاقات کو مس کرتی ہوئی کجی گئی ہی تو ثابت کرو

بعید البیضی اور بیضی کے نقاط تقاطع میں جو او تار ملا جائیں ان میں دو متوازی ہوں گے

(۵) اگر $ط - س = س$ مساوات بعید البیضی کی ہو (دفعہ ۳)

تو $ط - س = س$ مساوات متعلق الملاقات کی اور $ط - س = س$ مساوات مخروطی اور

$ط - س = س$ مساوات اقطار زوج کی ہے اور ان ایک مقدار مستقل ہے

(۶) ایک مثلث کی زاویوں کی جو خطوط تقصیف کرتے ہیں وہ مقابل کے ضلع سے متعلق
ع اور ق اور ر پر جداگانہ طے ہیں تو جو بیضوی ان نقطوں پر مثلث کے ضلع کو تقصیف کرتی ہوگی
کبھی جاؤنگی مساوات دریافت کرو

(۷) ایک نقطہ سے دو خط مستقیم کھینچے گئے ہیں ایک اونچے سے محور قریب بیضوی کے ساتھ
ہر پر اور دوسرا زاویہ کچھ + ہر بریل رکھتا ہے تو ثابت کرو کہ دوسرے قریب بیضوی کا نقطہ
تقاطع پر گزرتی ہے جس کا محور قریب بیضوی معلوم کے محور کے ساتھ زاویہ ۲ ہر بریل پر
(۸) ثابت کرو کہ مساوات تراش مخروطی کی جو نقطہ (ح وق) پر گزرتا ہے اور قریب بیضوی
ل ل ل کو راس پر اور عرض مستقیم کے ایک طرف پرس کرتا ہے یہ ہے

$$(ل - ل) (ل - ق) = (ل - ح) (ل - و) \quad (ل - ل) (ل - و) = (ل - ح) (ل - ق)$$

اور ثابت کرو کہ یہ بیضوی ہوگی اگر (ح وق) اندر قریب بیضوی کے ہواور بعد بیضوی
ہوگی اگر نقطہ باہر قریب بیضوی سے ہو

(۹) ایک تراش مخروطی مثلث اب س کی ضلع کو نقاط ل و ب و س پرس کرتی ہے
اور خطوط مستقیم ل و اور ب و اور س و تراش مخروطی کو ل و اور ب و اور س و پر
تقاطع کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ

(۱) خطوط ل و اور ب و اور س و جداگانہ نقاط تقاطع ب و س اور س و ب و پر
اور س و اور ل و اور ل و اور ب و پر گزرتی ہیں

(۲) خطوط ل و اور ل و کے اور ب و کے اور ل و کے اور ل و کے اور ل و کے
کے نقاط تقاطع جداگانہ ل و اور ب و اور س و واقع ہوتے ہیں

(۱۰) مثلث ل و ب س کے گرد ایک تراش مخروطی بنائی گئی ہے اور خطوط جو اس مثلث
زاویوں کے تقصیف کرتی ہیں تراش سے نقاط ل و ب و اور س و پر ملے ہیں ل و اور ل و اور س و
ل و کی مساوات میں نشان کرد

(۱۱) اگر مثلث کے گرد ترشش مخروطی رسم ہو اور مثلث کے زاویوں کے نقطہ نصف کرہ میں سے ترشش
 مخروطی سے جن نقطوں پر ہے جن او میں خطوط وصل ہوں جو مثلث اس طرح پیدا ہوگا اور اس کے
 اضلاع اصلی مثلث کے اضلاع متناظر سے جن نقطوں پر تقاطع کریں گے وہ ایک خط استقیم میں ہوں گے
 (۱۲) اس مساوات

$$\left(\frac{L}{P} + \frac{H}{V} - 1\right) \left(\frac{L}{P} + \frac{H}{V} - 1\right) = 0$$

کے معنی بیان کر دے ہوئے کتنی قریب البیضویاں کچھ سکتی ہیں
 چار نقاط معلوم پر گذرتے ہوئے کتنی قریب البیضویاں کچھ سکتی ہیں
 (۱۳) اگر نو = نو = وی = مثلث کے اضلاع کو تعبیر کریں تو ثابت کرو کہ
 اضلاع کسی مثلث کے جس کا ہر ایک زاویہ پہلے مثلث کے ہر ایک ضلع پر ہو وہ ان مساواتوں سے
 یو + ن مو + می = اور ل + مو + ل می = و م لو + می + می = تعبیر ہوئے
 اس میں ل اور م اور ن مقدار مستقل ہیں

ل اور م اور ن کو وہ ارتباط دریافت کرو کہ جسکی سبب مثلثوں کے زوایا متناظر میں خطوط وصل کے
 (۱۴) ایک دائرہ اور قائم الزاویہ بعید البیضوی چار نقطوں پر تقاطع کرتی ہیں اور ان کے اوپر مشترک میں
 سے ایک قطر بعید البیضوی کا ہی تو ثابت کرو کہ دوسرے مشترک قطر دائرہ کا ہوگا

(۱۵) ایک بیضوی کا محور اکبر اس کے اوپر اور اس محور اکبر پر جو دائرہ بنایا جائے اسکی محیط میں
 ایک نقطہ ہی اور ربع اور ربع بیضوی سے تقاطع اور قی پر ملتی ہیں تو ثابت کرو کہ مساوات

$$CQ^2 = (CA + CQ)(CB + CQ) - CA \cdot CB$$

ہی بیضوی کی مساوات کے محور بیضوی کے محور میں اور زاویہ اس سے ہے
 اگر نقطہ ربع کا معین ق ق سے نقطہ ربع کے مقام انقاطار کا بیضوی ہوگا
 (۱۶) جو نقطہ ایسا ہو کہ اگر اس سے عمود مثلث کے اضلاع معلوم پر نکالیں تو ان کے مربعوں کا مجموعہ

ایک مقدار مستقل ہو تو اس کا مقام انقاطار ایک بیضوی ہوگی
 اور اگر مقدار مستقل ایسی مقرر کی جائے کہ زاویہ اس کے مقابل کے ضلع کو بیضوی نقطہ دپرس کری تو

(۱۷) دفعہ ۳۱۳ کے طریقہ کتابت کو اختیار کر کے ثابت کرو کہ مساوات خط کی جو نقطہ س پر گذرتی ہو اور مرکز دائرہ ہو تو

(۱۸) دفعہ ۳۱۳ میں فرض کرو کہ نقطہ وسطا قوس لب کا ہی تو مساوات میں ب د اور ل کی جدا گانہ یہ ہو گی کہ

$$\begin{aligned} & \text{صہ جب س} + \text{لر (جب ل + جب ب)} = \cdot \\ & \text{ب جب س} + \text{لر (ب + جب ل)} = \cdot \end{aligned}$$

(۱۹) دفعہ ۳۱۹ کی مساوات (۴) میں اگر ل و ب و س نقاط تماس مثلث اور تراش مخروطی ہو تو ثابت کرو کہ مساوات لب کی

(۲۰) دفعہ ۲۹۲ کی شکل میں فرض کرو کہ $\text{ل} + \text{لو} + \text{م نو} - \text{ن می} = \cdot$ ہی مساوات اس کی اور $\text{م} = \cdot$ مساوات ب کی اور $\text{م} = \cdot$ مساوات ی کی اور

ل و ب و س مساوات اس تراش مخروطی کی نہ ہو جو نقاط ل و ب و س و دیگر گذرتی ہو تو ل و ب و س و د سے تماس نکالے جائیں اور ان کی مساوات میں دریافت کرو اور نیز مساوات میں لب و ب س اور ل کی دریافت کرو اور یہ ثابت کرو کہ خط فتح او ن ماسوں کے نقطہ تقاطع پر گذرتا ہے جو ل اور ب سے نکالے جائیں اور نقاط س اور د سے نکالے جائیں

(۲۱) وہ مشروط دریافت کرو کہ خط

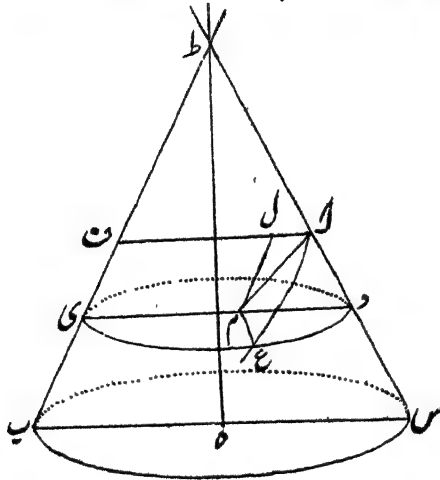
تراش مخروطی $\text{ل} + \text{لو} + \text{م نو} + \text{ن می} = \cdot$ کو مس کرے

(۲۲) دفعہ ۳۱۳ کی مساوات (۱) کے معنی از روی علم سندسہ بیان کرو اور ثابت کرو کہ وہ ایک خاص صورت شکل نظری دفعہ ۳۱۷ کی ہے

(۲۳) دفعہ ۳۱۳ کی آخر مساوات کی معنی بیان کرو اور اس شکل نظری کا استنباط کرو کہ اگر مثلث کے دائرہ بیرونی کے کسی نقطہ سے مثلث کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں تو مواقع عمود ایک خط مستقیم میں ہوں گے

(۲۴) اگر مثلث کے اندر بیضیوں کو بھی جائیں جن میں سے ہر ایک کا اسکے ایک خط مستقیم میں

ایک سطح مستوی کے تقاطع سے پیدا ہوتی ہیں
 مخروط وہ شکل ہے جو مثلث قائم الزاویہ کے اضلاع قائم الزاویہ کے کسی ایک ضلع کو ساکن رکھ کر
 اس پر مثلث قائم الزاویہ کو پورا چکر دینے سے پیدا ہو خط ساکن کو محور مخروط کہتے ہیں



فرض کرو کہ طہ ساکن ضلع اور مثلث قائم الزاویہ طہ س کے مدہ کو پورا چکر گاتا ہی اب علم ہندہ ترکیبی
 موافق مخروط کے بنائی میں خط طاس کو محدود گئے ہیں لیکن ہندہ تخلید میں خط کو دو طرف غیر متناہی
 کچھ لیتے ہیں طہ اور طاس میں جو ایک سطح مستوی کے گزرنے سے تراش مخروطی پیدا ہو وہ مخروط
 سے خط طاب پر لینگے اور یہ طاب مقام طاس کا او سوقت ہوتا ہی کہ مثلث قائم الزاویہ آدہا چکر
 ایسا کر گرتا ہی اب فرض کرو کہ تراش مخروطی اسطرح پیدا ہو کہ سطح مستوی جو عمود سطح ب و س پر
 ہو مخروط کو تراشے اور یہ تراش لے ہو اور وہ نقطہ ہی جہاں سطح متعادل طاس سے ملتی ہی
 اب ہم اس خط منحنی لے کی ذات اور صفات دریافت کرتے ہیں فرض کرو کہ ایک سطح منحنی
 کے کسی نقطہ پر گذرتی ہوئی عمود مخروط پر ہو تو طاب معلوم ہوتا کہ یہ سطح مخروط سے دائرہ
 دے ی پر میلی جس کا قطر دی سطح ب طاس میں ہو گا فرض کرو کہ م ع وہ خط ہی جس پر سطح دائرہ
 وہ سطح ملتی ہے جس پر بحث کر رہے ہیں اور م خط دی میں ہے چونکہ ہر ایک سطح جو م ع سے قطع
 ہوتی ہے عمود سطح ب طاس پر ہے اسلئے م ع عمود اس سطح پر ہی اور اسلئے جو

خط او س سطح میں ہو او سپر عمود ہے

اوت متوازی ہی دکا اور ملی متوازی طب کا کچھ اور لام ملاؤ اور لام = لد اور م ع = ر
اور ط ا = س اور ہ ط س = ہہ اور ط لام = ر فرض کرو زاویہ لام ملی برابر لام
اور طب کے زاویہ میلان یعنی ک - ر - ر - ہہ کے ہی

$$\begin{aligned} \text{اب } \frac{\text{م د}}{\text{م ا}} &= \frac{\text{ج م د}}{\text{ج م ا}} = \frac{\text{ج ب ر}}{\text{ج م ہہ}} \therefore \text{م د} = \frac{\text{ل د ج ر}}{\text{ج م ہہ}} \\ \text{ی م} &= \text{ف ت ا ل} = \text{ف ت ا} - \text{ا ل} = \text{ا ل} - \text{ا ل} = \text{س جب ہہ} - \text{ا ل} \\ \frac{\text{ا ل}}{\text{لام}} &= \frac{\text{ج م ا ل}}{\text{ج م ا ل}} = \frac{\text{ج ب (کو - ر - ہہ)}}{\text{ج ب (کو - ر - ہہ)}} \\ \therefore \text{ا ل} &= \frac{\text{ل د ج ر}}{\text{ج م ہہ}} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ی م} = \text{س جب ہہ} - \frac{\text{ل د ج ر}}{\text{ج م ہہ}} \quad \text{ل د ج ر} = (\text{ر} + \text{ہہ})$$

لیکن دائرہ کی خاصیت کے موافق م ع = ی م . م د

$$\therefore \text{نہ} = \frac{\text{ل د ج ر}}{\text{ج م ہہ}} \quad \text{[ا س ج ہہ} - \frac{\text{ل د ج ر}}{\text{ج م ہہ}}]$$

اب اگر اس مساوات اور دفعہ ۲۸ کی مساوات کا آبسکین مقابلہ کریں تو یہ دریافت ہو گا کہ
اگر - ج ب ر ج (ر + ہہ) منفی ہے تو تراش بیضوی ہے

اور اگر مثبت ہی تو تراش بیضی بعید البیضوی اور اگر صفری تو قریب البیضوی یعنی اگر ک سے ر + ہہ

چھوٹا ہے تو بیضوی ہے اور اگر بڑا ہے تو بعید البیضوی اور اگر برابر ہے تو قریب البیضوی ہے

اسے معلوم ہوا کہ اگر لام متوازی طب کا ہو تو تراش قریب البیضوی ہی اور اگر لام خارج کیا گیا

م کی طرف سے طب سے ملتا ہی تو تراش بیضوی ہی اور اگر لام خارج کیا گیا کی طرف سے

طب سے جو ط کی طرف خارج کیا جا ہی تو تراش بعید البیضوی ہے

اگر س = ۰ تو تراش ایک نقطہ ہے اگر ر + ہہ چھوٹا ک سے ہے تو خط

مستقیم ہے اگر ر + ہہ بڑا ک سے ہو تو تراش دو خطوط قطع ہیں اور

اگر ر + ہہ = ک تو تراش ایک خط مستقیم ہے

ساوات جو اوپر حاصل ہوئی ہے وہ اس طرح کہی جاسکتی ہے کہ

$$r = \frac{ح (ر + ۲ھ)}{ح ۲ھ} \quad \left[\frac{ر ح ۲ھ + ح ۲ھ}{ح (ر + ۲ھ)} \right] \quad \text{لا - لا}$$

فرض کرو کہ $r + ۲ھ$ چھڑیاک سے ہو تو مخروطی ایک بیضوی ہوگا اب اس مساوات اور مساوت

$$r = \frac{ص (ر - لا - لا)}{ص ۲ھ} \quad \text{کو باہم مقابلہ کرنے سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ}$$

$$r = \frac{ر ح ۲ھ + ح ۲ھ}{ح (ر + ۲ھ)} \quad \frac{ص ۲ھ}{ص ۲ھ} \quad \text{ح ۲ھ}$$

$$\text{پس } r = \frac{ر ح ۲ھ + ح ۲ھ}{ح (ر + ۲ھ)} \quad \text{و ص } = \frac{ر ح ۲ھ + ح ۲ھ}{ح (ر + ۲ھ)}$$

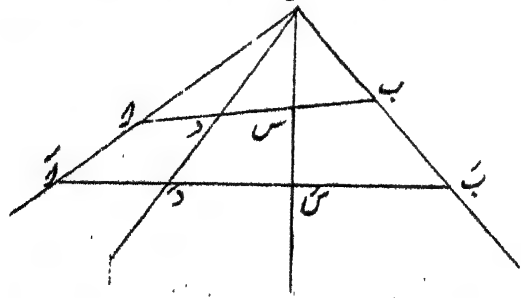
$$\text{اور نیز } ۱ = \frac{ص}{ح} = \frac{ح ۲ھ - [ح (ر + ۲ھ) - ح ۲ھ]}{ح (ر + ۲ھ)} \quad \text{یہ ہم (ر + ۲ھ)}$$

دفعہ ۳۲۴ کی شکل میں اگر فرض کریں کہ ہم مدودہ مخروط سے نقطہ لپیٹا ہے تو $r = لا$ اور $ص$ ہوگا اور یہی منہ پہلے سے سوچا تھا اور ص اوسط فی النسبت اولن عمودون میں ثابت ہوتا ہے جو $لا$ اور $ر$ سے مخروط پر لگاتے جائیں اور اس کے تماثل نتیجہ حاصل ہو سکتے ہیں اگر خط

منحنی بعد البیضوی ہو نسبت غیر موسیقہ اور مزبر موسیقہ (۳۲۵) اب ہم مختصر حال نسبت غیر موسیقہ کا اور مزبر موسیقہ کا کہتے ہیں

تحقیقات تراشہا مخروطی میں وہ اکثر بکار آمد ہوتی ہیں فرض کرو کہ چار خط مستقیم ایک نقطہ پر ملتے ہیں تو اگر کوئی خط مستقیم دوسرے میں نظر کو کاٹتا ہو اکھا جائے تو

$$\frac{ا ب}{ا س} \div \frac{د ب}{د س} \quad \text{ایک نسبت بالاستقلال ہوگی}$$



فرض کرو کہ ط ایک نقطہ موجہاں پر خطوط ملے ہیں تو

$$\frac{ا ب}{ا ط} = \frac{ح ب}{ح ا ط}$$

$$\frac{ا س}{ا ط} = \frac{ح ا س}{ح ا ط س}$$

$$\frac{ا ب}{ا س} = \frac{ح ا ط}{ح ا ط س} \cdot \frac{ح ا س}{ح ا ط}$$

$$\frac{ا ب}{ا س} = \frac{ح ب}{ح ا س} \cdot \frac{ح ا ط}{ح ا ط س} \cdot \frac{ح ا س}{ح ا ط}$$

$$\frac{ا ب}{ا س} = \frac{ح ب}{ح ا س} \cdot \frac{ح ا ط}{ح ا ط س} \cdot \frac{ح ا س}{ح ا ط}$$

اب فرض کرو کہ کوئی اور خط مستقیم و د ب نظم مذکور کا طسا ہو اگیا گی ہی تو اس سبب ہی کہ زاویے ا ط ب اور ا ط ب ایک ہیں اور زاویوں کی یہی کیفیت ہی

$$\frac{ا ب}{ا س} = \frac{ح ب}{ح ا س} = \frac{ح ا ط}{ح ا ط س} = \frac{ح ا س}{ح ا ط}$$

اسے دعویٰ ثابت ہے

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ہر یک نسب ذیل میں نسبت بالامتثال ہی

$$\frac{ا ب}{ا د} = \frac{س ب}{س د} \text{ اور } \frac{ا س}{ا د} = \frac{س ب}{س د}$$

(۳۲۶) حدود خارجہ جو ایک نقطہ پر ملے ہیں اسی مزب کر سکتے ہیں
مزب کو خط قطع کرنا ہو اگیا گیا ہے اسے خط امتثال کہتے ہیں

$$\frac{ا ب}{ا س} = \frac{ا د}{ا س} = \frac{س ب}{س د} = \frac{ا د}{ا س} = \frac{س ب}{س د}$$

یہی ہے ہر یک کو مزب کی نسبت غیر موسیقہ کہتے ہیں

اگر ا ب . د س = ا س . ب س یعنی اگر سطح کل خط (ا ب) اور حصہ متوسط (د س) کے

برابر سطح اور دو حصوں (ا د) اور (ب س) کے ہو تو مزب کو موسیقہ کہتے ہیں

(۳۲۷) مزب موسیقہ کی وجہ تسمیہ یہ ہے کہ وہ خط متقاطع کو نسبت موسیقہ پر تقسیم کرتی ہے

$$\text{اس واسطے کہ } ا ب . د س = ا د . ب س$$

$$\frac{ا ب}{ا د} = \frac{ب س}{د س}$$

یعنی اگر ہم ا ب اور ا س اور ا د کو اول اور د س اور ب س اور ب س مقدار قرار دیں تو اول کو تیسرے

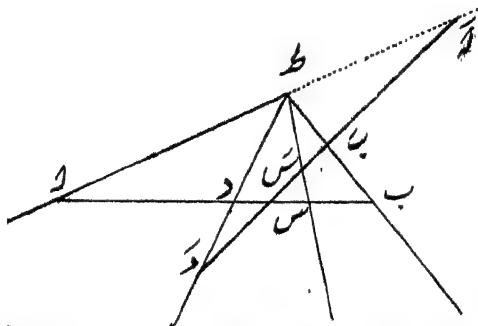
وہ نسبت ہوگی جو اول اور دوم کے تفاوت کو نسبت دوسرے اور تیسرے کی تفاوت سے ہے

جب مزرب موسیقہ ہو تو مزرب کی نسب بالا استقلال میں سے ایک نسبت برابر واحد کے ہوگی
ہم بعض اوقات مزرب کی نسب غیر موسیقہ میں سے ایک کو منتخب کریں گے اور ساری اپنی توجہ اسی پر
صرف کریں گے اور اس نسبت منتخب کو مزرب کی نسبت غیر موسیقہ کہیں گے

(۳۲۸) فرض کرو کہ ط لا و ط ب و ط س و ط د ایک مزرب موسیقہ بناتے ہوں

اب اگر ہم سب سے جدید ط قرار دیں اور ط لا د ط ب د ط س د ط د ملائیں تو یہ چاروں خطوط مزرب جدید
اس واسطے کہ خط متقاطع اب س د کی نسبت موسیقی تقسیم ہوا ہے

(۳۲۹) مزرب کی نسبت غیر موسیقہ میں کچھ تبدل نہیں واقع ہوتا اگر خط متقاطع بجای خطوط کے
قطع کریں گے ان خطوں کو اس حال میں قطع کرے کہ وہ بڑے جائیں



فرض کرو کہ ط لا و ط ب د ط س و ط د ایک مزرب ہے اور اب س د خط متقاطع مزرب کے
تین خطوں سے اور جو یہی خط لا ط محدودہ سے لے کر تا، زاویے لا ط ب اور لا ط د تکملہ ایک
دوسرے کے ہیں اور سے لا ط د اور لا ط د میں اور علیٰ ہذا القیاس کے معلوم ہوا کہ نسبت موسیقہ
اب س د پر مبنی ہو رہے برابر اس نسبت موسیقہ کے ہے جو متناظر اس کے لا ب س د پر مبنی ہے

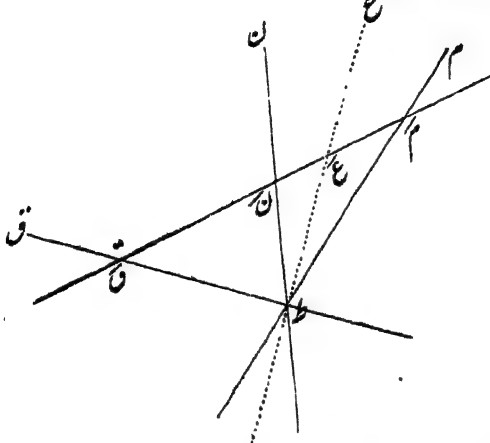
(۳۳۰) فرض کرو کہ لا ب بس د = لا د ب بس ط لا و ط ب و ط س و ط د

مزرب موسیقہ بناتے ہیں تو بموجب اخذ دعویٰ کے

$$\frac{لا}{د} \div \frac{ب}{س} = \frac{لا}{د} \div \frac{ب}{س} = ۱$$

ط لا و ط ب و ط س د ط د مزرب موسیقہ بناتے ہیں

علیٰ ہذا القیاس ط س و ط ب و ط ا اور دہ خارج کیا گیا ط کی طرف ایک مزربوسیقہ بنائی گئی
پس ایک مزربوسیقہ کے خطوں کے کہنے سے چار مزربوسیقہ حاصل ہونگے
(۳۱۳) جس خط کی ساواتین ہے = و ب = ۰ و ہے - ک ب = ۰ اور ہے + ک ب = ۰
ہیں اونی مزربوسیقہ بنتا ہے



فرض کرو کہ ط م خط

ہے = ۰

ط ن

ط ع

ہے + ک ب = ۰

فرض کرو کہ خط متقاطع مزرب کا م ع ن ق ہے تو بموجب دفعہ ۷ کے

ج ب ع ط م = ک ب = ح ق ط م

ج ب ع ط ن = ح ق ط ن

∴ ج ب ع ط م . ح ق ط ن = ۱

∴ دفعہ ۳۲ کی طرح ع م . ق ن = ۱

∴ ع م . ق ن = ع ن . ق م

یہی نتیجہ حاصل ہوگا اگر ہم خط متقاطع کو کسی اور مقام پر چھین مزربوسیقہ اس طرح بنائے کہ او

خارجی خطوط میں سے ہمیشہ ایک خط ان دو ہے = ۰ اور ب = ۰ میں سے ہوتا ہی

اور ایک خط ان دو خطوط ہے - ک ب = ۰ اور ہے + ک ب = ۰

ماسون کو محور بنا دو مساوات خط متعین کی بوجب دفعہ ۲۵۲ کے یہ ہوگی

$$(۱) \quad \left(\frac{ل}{ج} + \frac{ب}{ق} - ۱ \right) + ب ل د = ۰$$

فرض کرو کہ ایک خط ستیم سب سے کھینچا جائے اور اس کے مساوات بوجب دفعہ ۲ کے یہ ہو

$$(۲) \quad \frac{ل}{ج} = \frac{ب}{ق} = ۱$$

پس (۱) اور (۲) کے نقاط تقاطع کے ابعاد جو سب سے ہوں ان کی قیمتیں یوں کی قیمتیں ہوں گیں جو اس مساوات سے دریافت ہوں

$$\left(\frac{ل}{ج} + \frac{ب}{ق} - ۱ \right) + ب ل م = ۰$$

$$(۳) \quad \left(\frac{ل}{ج} + \frac{ب}{ق} - ۱ \right) + ب ل م = ۰$$

اگر یوں قیمتیں مساوات کی ہوں تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$(۴) \quad \frac{ل}{ج} + \frac{ب}{ق} = ۱ \quad \left(\frac{ل}{ج} + \frac{ب}{ق} \right)$$

اور نیز مساوات وتر ماس کی یہ ہے کہ

$$(۵) \quad \frac{ل}{ج} + \frac{ب}{ق} - ۱ = ۰$$

اسے معلوم ہوا کہ نقطہ تقاطع (۲) اور (۵) کا جو بعد بن سب سے ہے اس کی یہ مساوات حاصل ہوتی ہے کہ

$$(۶) \quad \frac{ل}{ج} = \frac{ب}{ق} = ۱ \quad \text{یا} \quad \frac{ل}{ج} + \frac{ب}{ق} = ۱$$

(۴) اور (۶) سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

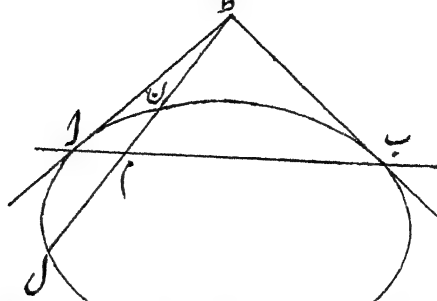
$$\frac{ل}{ج} + \frac{ب}{ق} = ۱$$

پس یوں اوسط موسیقی در میان یوں اور یوں کے ہے

چونکہ ل م ن ط نسبت موسیقیہ تین ہوا

اگر کسی نقطہ سے اب کے ہم خطوط

ل اور ن اور ط تک کھینچیں تو یہ خطوط اب کے ساتھ ایک مذہب موسیقیہ بنائیں گے



ایک خاص صورت وہ جی ہمیں نقطہ اب میں نقطہ تقاطع اوّلیٰ ماسون کا ہوتا ہے جو ن اول سی کا جائزہ
یہ ماس اب پر ملتے ہیں (دفعات ۱۰۳ و ۱۰۶ و ۱۰۸ دیکھو)

(۳۳۶) فرض کرو کہ اب دس و د چار نقطہ ایک تراش مخروطی کے ہیں اور ع ایک بیچ

فرض کرو کہ وہ عمود ہی جمع سی اب پر اور ب وہ عمود ہی جو اسی نقطہ سی ب س پر
اور لہوہ عمود ہو جو س د پر اور مروہ عمود ہو جو د پر نکالا جائے تو

بوجب دفعہ ۳۱۷ کے ہم جانتے ہیں کہ خواہ کہہیں ہو کہ نسبت بالاستقلال ب مرے
رکھتا ہی اب اب اب . وہ = دو چند رقبہ مثلث ع اب یا

$$= ع \cdot ا \cdot ب . ح \cdot ا \cdot ب$$

$$= ع \cdot ا \cdot ب . ح \cdot ا \cdot ب$$

اس طرح سے ب و لہوہ کی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں پس
ع . ا . ب . ع . س . ع . د . ح . ب . ع . س . ح . د . ع . ا . کونست بالاستقلال

$$ع \cdot ا \cdot ب . ع \cdot س . ع \cdot د . ح \cdot ب . ع . س . ح \cdot د . ع . ا$$

$$= ح \cdot ا \cdot ب . ح \cdot س . ع \cdot د . ح \cdot ب . ع . س . ح \cdot د . ع . ا$$

چار نقاط اب و س و د تک ضرب بنایا جائے اوسکی
نسبت غیر موسیقیہ بالاستقلال ہوگی

مشالوں کے جواب

پہلا باب

(۸) محدین نقطہ کے $\frac{1}{2}$ (لام + ملام) اور $\frac{1}{2}$ (م + م) ہیں
 اور محدین نقطہ کے $\frac{1}{2}$ (لام + لام + لاس) اور $\frac{1}{2}$ (م + م + م) ہیں

(۱۰) فرض کرو کہ تق اور محدین قطبیہ میں کمی ہین تو زاویہ لاس = زاویہ ب ط س

$$\text{یعنی } ر - ر = ر - ر \therefore \frac{1}{2} (ر + ر)$$

پہر ثلث کے رقبہ کے جملہ معلوم سے ہلکویہ حاصل ہے کہ (۱۶ باب دیکھو)

$$\text{ثلث ل ط ب} = \frac{1}{2} (ر + ر) \text{ جب } (ر - ر)$$

$$\text{ثلث ل ط س} = \frac{1}{2} (ر + ر) \text{ جب } (ر - ر)$$

$$\text{ثلث ب ط س} = \frac{1}{2} (ر + ر) \text{ جب } (ر - ر)$$

$$\text{پس } (ر + ر) \text{ جب } (ر - ر) = (ر + ر) \text{ جب } (ر - ر) + (ر + ر) \text{ جب } (ر - ر)$$

$$= (ر + ر) \text{ جب } (ر - ر)$$

$$\therefore (ر + ر) = (ر + ر) \text{ جب } (ر - ر)$$

تیسرا باب

$$(۱) ۱ + ۲ = ۳ \quad (۲) ۲ = ۳ \quad (۳) ۳ = ۴ \quad (۴) ۴ = ۵$$

$$(۲) ۴ - ۳ = ۱ \quad (۳) ۳ - ۲ = ۱ \quad (۴) ۲ - ۱ = ۱$$

$$(۳) ۱ - ۰ = ۱ \quad (۴) ۲ - ۱ = ۱ \quad (۵) ۳ - ۲ = ۱$$

$$(۴) ۴ - ۳ = ۱ \quad (۵) ۵ - ۴ = ۱ \quad (۶) ۶ - ۵ = ۱$$

$$(۶) ۹ - ۸ = ۱ \quad (۷) ۱۰ - ۹ = ۱ \quad (۸) ۱۱ - ۱۰ = ۱$$

$$(۹) ۱۲ - ۱۱ = ۱ \quad (۱۰) ۱۳ - ۱۲ = ۱ \quad (۱۱) ۱۴ - ۱۳ = ۱$$

$$(۱۲) \frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \quad (۱۳) \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶} \quad (۱۴) \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۱۲}$$

(۱۵) (۱) مبداء (۲) دوخط مستقیم = لد اور ک = لد (۳) دوخط مستقیم = لد + ک = ۴۱ بخور (۵) نامکمل (۶) دوخط مستقیم

لد = اور ۱ = (۱۶) (۱) دو خط شیعہ لد = اور ۱ = ب (۱) نقطہ (۱) اور ب (۲) نقطہ (۲) اور ۱ = (۱۷) خطوط ۱ = لد اور ۱ = ۳ لد (۱۸) ۱ = ۵ لد اور ۳ + ۲ لد - ۲۰ =

(۲۰) فرض کرو کہ ماطول ضلع میں اس کا ہو تو مساوات (۱) کی $\epsilon = 0$ اور اس کی

سہ سہ = لہ اور لہ کی سہ = لہ سہ اور ای کی لہ = . اور اف کی

۱۔ لا ھے = اور بس کی ۲۔ ھے (لا-ط) اور ب دکی لا = ط

بی کی س + ہم (لد-ط) = . اور رب کی س + ہم + لد-ط = .

اورس دکی ۷ + لاہ ۳ = ط ۲ اورس ی کی ۳ + لاہ = ط ۳

اور سرف کی ۲ = ط ۱۳ اور دی کی ۱ = ط ۱۳ ط اور دف کی

۳۸ - لا = م ط اور ی ف کی - لا = م ط = ط م

(۲۱) اگر (لام و دم)، (لام و دم) و (لام و دم) کو نوں کے نقطے ہوں تو مسجدین

نقطہ وسط اول اور دوم کے $\frac{1+1}{2}$ اور $\frac{1+2}{2}$ میں اور اس طرح

محدودین نقطہ وسط دوم اور سوم کے معلوم ہو سکتے ہیں اور یہ موجب دفعہ ۳۵ کے

مساوات درج ذیل ہو سکتی ہے: (۲۲) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ (۲۳) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} + \frac{1}{w}$ (۲۴) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{v}$

اور $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ اور ان کے زاویہ درمیانی کا محاس $\frac{r_1}{r_1 - r_2}$ (۲۹) نقاط

جملے محدود $\frac{1}{2}$ $\sqrt{a+b}$ اور $1 - \frac{1}{2} \sqrt{a+b}$ من

(۳۱) $\frac{2n-1}{n+1}$ (۳۵) ۹. (۳۶) ج (۱) \therefore

ایک نظام خطوں کا معلوم ہوتا ہے، جو سر زمین گذرے زمین اور ص ۳۰ = سے تین خطوں =

اوری = لہاس اوری = لہاس (۴۰) اول زوج خطوط کے زوايا دريانی

کو دوسرا زوج خطوں کا تنصیف کرتا ہے

(۳۶) فرض کرو کہ اب س مثلث ہیں اور کو مبد ر بناؤ اور نقطہ ل سے جو دو خط متوازی خطوط مبد ر

کے کچے جائیں اور کو مبد ر بناؤ اور لا اور د کو محدودین ب کے اور لا اور د محدودین نقطہ س کے

فرض کرو ثوابت ہو سکتا ہے کہ مساواتیں تینوں اضلاع کو ر کی یہ ہیں کہ

$$س - د = س - د = س - د \quad (لا - لا) \quad د - د = د - د = د - د \quad (س - س) \quad لا - لا = لا - لا = لا - لا$$

ان مساواتوں سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ تینوں اضلاع ایک نقطہ پر ملتے ہیں

(۳۷) ط کو مبد ر قرار دو اور معادلات قطبیہ معلوم خطوط قائم کو کام میں لاؤ (۳۶) فرض کرو

کہ لا محدود نقطہ تقاطع دو خطوں کا ہے اور قیہ مثلث کا ل (س - س) (لا) ہے

(۳۸) یہ موجب دفعہ کے حل ہو سکتا ہے یا ہم پہلے سوال کے نتیجہ کو کام میں لا سکتے ہیں

کیونکہ ہم شکل نیا کر تین مثلث ایسے بنا سکتے ہیں کہ اوہ تین سوالات سابق الذکر کا استعمال

ہو سکتا ہے اور مثلث مطلوب کا رقبہ تفاوت ان دو مثلثوں اور قیہ مثلث کا ل سے

$$\text{الحاصل نتیجہ یہ ہے کہ} \quad \frac{(س - س) (س - س)}{(س - س) (س - س)} + \frac{(س - س) (س - س)}{(س - س) (س - س)} + \frac{(س - س) (س - س)}{(س - س) (س - س)}$$

اور اس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{(س - س) (س - س)}{(س - س) (س - س)} + \frac{(س - س) (س - س)}{(س - س) (س - س)} + \frac{(س - س) (س - س)}{(س - س) (س - س)}$$

علامت وہ یعنی چاہے کہ جسے نتیجہ ثابت حاصل ہو

چوتھا باب

$$(۱) \quad \frac{ا}{ب} + \frac{ب}{ا} = \frac{ا}{ب} + \frac{ب}{ا}$$

سے

(۲) مثال ہ میں جس خط کا بیان ہوا، اور کا متوازی خط مطلوب ہے اسلئے اور سوا ت یہ فرض

ہم حم ل - ف ج ب + ق = . امین ق ایک مقدار متقل ہے جس کا

تشخیص کرنا منظور ہے اب اب کے نقطہ وسط پر یکو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$س - د = س - د = س - د \quad (لا - لا) \quad د - د = د - د = د - د \quad (س - س) \quad لا - لا = لا - لا = لا - لا$$

ایسے سے س ج ب ج ل + س ج ل ج ب + ق = .

پس ق تشخیص ہو گیا

(۱۳) (م ن - م ن) نو + (ن ل - ن ل) مو + (ل م - ل م) می = .

(۱۴) لب (لو - مو) + س (ب + ل) می = .

(۱۵) ل هه + م ب + ن ر = . تو مساوات مطلوبہ فرض کرو

دائرہ اندرونی کے مرکز پر هه = ب = س پس ل + م + ن = . اور مرکز دائرہ بیرونی پر

هه دب و س تناسب جداگانہ جسم ل و جسم ب و جسم س کے ہیں

پس ل جسم ل + م جسم ب + ن جسم س = . پس کے نتیجہ مطلوب حاصل ہو سکتا ہے

(۱۸) س ع کی ۲ م مو - ن می = . اور د ع کی ۲ ل ی - ۲ م می + ن می = .

ا ق کی ل لو - ۲ م مو + ۲ ن می = . اور ق کی ل لو - ۲ م مو = .

(۲۳) یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر لو = . اور مو = . اور می = . اضلاع مثلث کے ہوں

تو خطوط ا د ع اور ب ع اور س ع بھی م مو - ن می = . اور ن می - ل لو = . سے

اور ل لو - م مو = . سے جداگانہ تعبیر ہوتی ہیں اب اور ساتین بھی خطوں کی آسانی

بیان ہو سکتی ہیں

(۲۴) فرض کرو کہ هه = . دب = . اور س = . اضلاع مثلث لب س کو تعبیر کرنے

تو مساواتیں ب س دب ل و لب کی جداگانہ ب + س = . اور س + هه = .

اور هه + ب = . تو مساوات ل ل کی ب - س = . کی ہوگی اور ل ل عمود

ب س پر ہوگا

(۴۵) مساوات ط ل کی ب - س = . نقطہ سے جو خط کھینچا جائے اس کی مساوات ب - س - ل = بمقر کر

پس یہ دریافت ہوگا کہ مساوات ط ل کی ب - س - نو (هه - س) = . اور مساوات ط ی کی

ب - س - نو (هه + ب) = . ماس نقطہ پر ب = - ل اور یہی ربط نقطہ ق پر قائم ہے

انخوان باب

جوابات

~~$$\frac{r}{r} - \sqrt{\frac{r}{r}} = \frac{r}{r} (\frac{r}{r}) (\frac{r}{r}-\frac{r}{r}) = (\frac{r}{r}+\frac{r}{r}) \quad (1)$$~~

(۴) فرضاً $n = ۱۰$ (۵) بموجب دفعہ ۱۳، کمپوہ حاصل ہے

کہ م = $\frac{\text{حصہ (دھہ)} \text{ اور ن}}{\text{ج د}} - \frac{\text{حصہ (د-ن)} \text{ اور م}}{\text{ج د}} = \frac{\text{حصہ دھہ}}{\text{ج د}}$

۱۰ = $\frac{۱۰۰}{۱۰}$ چھٹا باب

(۱۰) (۱۱) محدین مرکز کے ۲ اور ۴ ہیں اور نصف قطر ۴

(۲) محدین مرکز کے - ۳ اور ۳ اور نصف قطر ۳

(۲) اول خط تقییر دائرہ سے نقاط (۴-۳) اور (۳-۴) پر ملتا ہی اور دوسرا

نقاط (۵-۰) اور (۰-۵) اور تیرا نقطہ (-۴-۳) پریس کرتا ہے

$$= \ddot{x} \dot{x} + \dot{x} \ddot{x} + (\ddot{x} + \dot{x})x - \dot{x} + (\ddot{x} + \dot{x})x - \dot{x} \quad (5)$$

(۸) نقاط تقاطع کے محدود دریافت کرنیکے واسطے سکوپ بہ حاصل ہے کہ

$$\text{لذا} \left(1 + \frac{r}{100} \right) + \frac{r}{100} (ص - ق) - لا - رط لا + ق - رص ق =$$

اگر خط و دائرہ کو جس کرتا ہی تو کمکو بہ حاصل ہی کہ (ق ص ح ط آ) + ح ق (ق ط ا ح ص) ح ق

$$(4) \quad r_2 + s_2 = 0 \quad (14) \quad r_1 + r_2 - s_1 - s_2 - q_1 - q_2 = 0$$

(۱۵) زاویہ میلان محوروں کا 12° ہی اور سرایک کے مرکز کا معین $\text{ح} = \text{ا} = \text{نصف قطر} = \text{ح}$

(۱۴) نزاد میلان محمرون کا ۹۰ فی صدی اور محدوم مرکز = $\frac{2}{5}$ اور

نصف قطر = $\frac{2}{3}r$ (12) $9 = 4 - 7r + 5r + 9$

$$\boxed{2n - 1 + 2n} \quad (19) = 1 - s + 2s + 2s + 2s + 2s \quad (18)$$

$$(۲۳) \quad \text{لد} + \text{ر} = \text{ط} \quad (\text{لد} + \frac{\text{ر}}{\frac{1}{4}}) \text{ اور } \frac{\text{ط}}{\frac{1}{4}} = \text{جم} \quad \text{حد} \left(\frac{1}{4} - \right)$$

(۲۷) ایک دائرہ (۲۸) سوال ۲۶ کی مساوات کو کام میں لادو

(۴۹) محدودین قطبیہ کے استعمال سے

(۴۹) محدودین بتلیہ سے استعمال

$$[(ن + ط - ر) م طحم (کے - ر)] = [(ن + ط - ر) م طحم (ر)] +$$

۱۴۱۰
انشاء بمودت و بهیمن حاصل بگویند این است: در طریقه (رسم) (کتاب)

۱۔ یہ معلوم ہو کہ تمام انتظام و تدبیر ہے جس میں شریعت کے گرد بنایا جائے

(۳) جب ایک حصہ + ایک باب + حائضہ + ... = جم حصہ + جم باب + جم حرف + ...

اور جب اسے + جیام پیا + دیکھا اس ... = لف

(۳۳) اگر دو نمود خط کے ایک ہی جانب میں ہوں تو مقام التقاط دائرہ ہی اور اگر خط کی نما

جانوبی میں تو مقام القضاہ و خطوط یقیم ہیں (۳۳۳) ایک دائرہ (۳۳۴) ایک دائرہ

(۳۶) مساوات در حد دوم می‌کند و حل کرد و تو به دریافت هوای که

نق = سطح جسم یا سطح قطر پس مقام النقاط ایک خط مستقیم اور دائرہ ہی

(۳۸) قطر کی طرف کو قطب بناو مثال ۳۲ سے یہ استخراج ہوگا کہ مماس جو نقطہ ع

نکاحی مساوات ۲ س حجم = ۲ حجم (۲-۱) سے اور ماس جو نقطہ ق سے

نکال دیا جائے مساوات اس حجم آب = مٹی (۲۰۰) سے تعبیر ہوگا۔ اور یہ ماس

نقطہ تیرم ہے اس نقطہ پر ہم حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{جم (۲۰۰۰-۲۰۰۱)}}{\text{جم (۲۰۰۰-۲۰۰۱)}} = \frac{\text{جم (۲۰۰۰-۲۰۰۱)}}{\text{جم (۲۰۰۰-۲۰۰۱)}}$$

سے بکوبہ دریافت ہوگا کہ مسر = $\frac{\text{حک (ف + ہد)}}{\text{حک (ف + ہد)}}$

یس اگر س مرکز دایره ہو تو سیت = س ح (دک + ح)

اسے سم ثنائت کر سکتے ہیں کہ س ق - س ت = س ک ت - س ع

سنا توان باب

(۴) $s = 11$ اور $11 + s = \frac{3}{s+11}$ (۵) فرض کرو کہ $s = m$ لہ

مساوات ایک خط کی ہو تو مر = $\frac{2x + 3y}{4 + 3}$: مر (1 + م) = (م - م لار)

یہ مساوات درجہ دوم م کی ہے اور ہم کی جگہ $\frac{1}{k}$ رکھ سکتی ہیں

(۶) اگر سڑ + سڑ + ت + ا سڑ + و س بے - م و س و س بے - ب بے (و س + س و) =

(۵) $5 = 2 + 3$ (۶) $5 = 1 + 4$ (۷) $5 = 0 + 5$

(۸) نقطہ (۹) و (۱۰) پر طول $PA = 1$ (۹) $PA = 2$ اور $PA = 3$

نقطہ لا = ۱ اور ک = ۰ پر ہی (۲۰) محدود نقطہ مطلوب کا $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right)$ اور
محین $-\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right)$ اور طول وتر کا $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right)$ (۲۲) مقام النقاط
ق کا لا = ۲ مقام التقاطق کا لا = ط (۲۳) قریب البیڑی کے عت اور قطر

نقطہ جمع ہے محور تا کر مساوات قریب البضوی کی لو دفعہ ۱۵ (۲۵) دفعہ ۱۵۵ ایک
(۲۷) دفعہ ۲۵ کی مساوات (۱) کی قطبی محدین میں تبدیل کرو اور اسے ہم یہ استخراج
کرنے کے لیے $r_2 = r_1 \pm \frac{m}{(m+2)}$ (۲۷) مقام النقاط قریب البضوی ہے

دفعہ ۱۴۷ دیکھو (۲۳) $\frac{1}{10} + 3 = \overline{(7h r b)}_h$

$$= \cancel{a} s + \cancel{s} s - (\cancel{a} + b) \cancel{a} - \cancel{s} + \cancel{s} (mn) = \cancel{a} \cancel{a} b a - (\cancel{a} - \cancel{s}) (mn)$$

(۱۳) مثال ۵ باب ہشتم کو کام میں لادو (۴۱) مساوات ماس کی اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$s = m(a+b) + \frac{1}{2}m$ (مثال ۴۰ دیکھو) اور دوسرا ماس

$$s = \frac{1}{2} (L + P) - P \text{ م استقامت کو کرو تو مقام التقاط مطلوب}$$

لا + ط + اظ = بگو (۴۲) مساوات وترکیبی = م + لا + ن تومیحد و نقطه وسط وترکیبی
درافت کردنکے واسطے نصف مجموعہ قسمتوں مساوات (م + لا + ن) = ۴ ط لدا کاینجا

پس محدود $\frac{م}{ط} = ۸$ ہے اب چونکہ وتر قریب البصوی $۸ = ط$ (لا-س) کو کسی
 مساوات (م لا-ن) $۸ = ط$ (لا-س) کی برابر قیمتیں ہونی چاہئے اس شرط کے وسیلہ
 ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $\frac{ط}{م} = س$ (۴۷) مساوات جسے قریب البصوی کی ایک
 یہی نقطہ کا معین شخص ہوتا ہے جسے کہ عمود الماس نقطہ معلوم پر گزرتا ہے تو مساوات کلی
 ہوگی (۴۵) نقطہ (لاوی) سے جو تین عمود الماس کیچے جائیں اوکا انحر کے ساتھ جو زاویا میلان
 ہونگی اوکے ماس اس مساوات $م + (۲ - \frac{ط}{س}) = \frac{ط}{س}$ سے تشخیص ہو رہی ہے

۳۵ کو دیکھو

فرض کرو کہ $م$ اور $م$ قیمتیں اس کے مساوات کی تو بموجب مسائل معادلات کے

$$۳ + م + ۲ = م + ۳ + م + ۱ + م + ۱ + م + ۱ = ۲ - \frac{ط}{س}$$

$$اور م + م + ۳ = - \frac{ط}{س} اگر دو عمود الماس علی القوائم ہوتو م + م + ۳ = - ۱$$

کہہ سکتے ہیں ان مساواتوں سے $م$ اور $م$ کے اسقاط سہی $ط = ط$ (لا-س)

دریافت کرتے ہیں (۴۹) غرض اسے مراد وہ بعد ہی جو درمیان اون ماسوں کے واقع ہیں

$$جو متوازی ع ق کے ہو (۴۴) $\frac{ق - ۴}{ط + ۴} = \frac{۵۵}{ط}$ مساوات $ط = م + ط$ قریب البصوی$$

کے ماس کو تعبیر کرتی ہے اگر یہ ماس نقطہ ح وق پر گزرتے تو $ق = م + ط$ حاصل ہوگا

$$اور م = \frac{ق - ط}{س} (لاوی) کوئی نقطہ ماس پر ہنی$$

$$پس ق - لا-ق ح = ط (لا-س) اسے اول صورت مساوات کی پیدا ہوگی$$

دوسری صورت مساوات کی اول صورت سی مستنبط ہو سکتی ہے دفعات ۳۲۱ و

$$۳۲۲ و ۵۹ کو دیکھو (۵۶) مساوات $ط = ۴$ ط لا قریب البصوی کو تعبیر کرتی ہے$$

اور مساوات ق- $ط = لا$ $ط = ۲$ و تر ماس کو تعبیر کرتا ہے اسے معلوم ہوا کہ مساوات

$$۴ = ط (ق- $ط = لا$) $ط = ۲$ بعض مقام القاط کو تعبیر کرتا ہے جو قریب البصوی اور$$

وتر کے نقطہ تقاطع پر گزرتا ہے دفعہ ۶۱ دیکھو

نوان باب

(۱) $\frac{1}{2} \pi$ (۲) $س + ی = لد = ط$ اور حصہ مابین محور $لد = ط$ اور

حصہ مابینی محور $س = ط$ (۳) $س + ط = ی = ط$

(۴) نسبت خارج المکرزی $ی + ی = ا$ سے تحقیق ہوتی ہے (۵) $س = \frac{ص}{ط}$ (لد + ط)

$س = \frac{ص}{ط}$ اور $\frac{ص}{ط} = ی$ اور $ی = ا$ (۶) $س = \frac{ص}{ط}$ (لد - ط) اور محدود نقطہ تقاطع کا $\frac{س}{ط} = ی$ ہے

(۷) $س = (۱ + ی) (لد - ط)$ اور $س = (۱ + ی) (لد - ط)$ اور $س = (۱ + ی) (لد - ط)$

(۹) محدود نقطہ کے $لد = \frac{ط}{س}$ اور $س = \frac{ص}{ط}$ اور $س = \frac{ص}{ط}$

(۱۰) محدود نقطہ کے $لد = \frac{ط}{س}$ اور $س = \frac{ص}{ط}$ اور $س = \frac{ص}{ط}$

(۱۱) اگر زاویہ میلان دو خطوط متوازیہ کا محور اکبر کے ساتھ بڑا ہے نسبت $س = ط$ کے ہوتو

دائرہ بالکل باہر بڑھتی ہے واقع ہوگا (۱۲) $\frac{ط}{س} = (س + ص) = (س + ص) = ا$

(۱۳) محدود نقطہ مطلوب کے $لد = ط$ اور $س = ط$ اور $س = ط$

جب $س + ی = ا$ تو خطوط متوازی ہونگے

(۱۴) $لد + س = لد (ط + ی) - س + س + ط = لد$ (۱۵) اگر نقطہ (ع وق)

درمیان خطوط منقطع کے ہوتو مجموعہ عمودوں کا $\frac{ط}{س} = (ط + ی + ص) = (ط + ی + ص)$ اور

کا درمیان خطوط منقطع کے ہوتو مجموعہ عمودوں کا $\frac{ط}{س} = (ط + ی + ص) = (ط + ی + ص)$ اور

اگر ح مثبت ہوتو اوپر کی علامت اور اگر ح منفی ہو تو نیچے کی علامت (۱۶) دائرہ

جس کا مرکز بڑھتی ہے مرکز پر ہوا اور نصف قطر $ط + ص$

(۱۷) $س = لد \pm (ط + ص)$ دفعہ ۱۷ دیکھو (۱۸) مقام التقاط دائرہ

$لد + س = ط + ص$ ہے یہ شمال ۳۳ کی درجہ حصہ سے مستقیم ہو سکتا ہے

(۱۹) باب ششم کے ۵۵ شمال پر حرکت کیا ہے اسی دیکھو (۲۰) اس شمال کا یہاں جزو

اس طرح حل ہوتا ہے کہ اوس خط کی مساوات دریافت کریں جو دو بیضیوں کے تقاطع نقطہ پر گذرتا ہے
 (۲۵) $لا + ۵ = ط + ص$ (۱) $لا + ۵ = ط + ص$ (۲) (۳) فرض کرو کہ جوق محدودین نقطہ
 بیرونی کے ہیں انکے مطابق مساوات وترماس کی $ط + ۵ = ص + لا = ط + ص$ اور مساوات

اوس خط کی جو (جوق) سے عمود وتر پر ہو (د-ق) $ص + ج = ط + ۵$ (لا-ج)
 اب ہم یہ جانتے ہیں کہ دوسرا خط ماس بیضی کا ہو اس ماس ہونے کے واسطے جو شرط ضروری ہے
 وہ اس مساوات کو مساوات $د = م + لا + م + ط + ص$ کے ساتھ مقابلہ کرنے سے دریافت
 ہو سکتی ہے اور یکو یہ حاصل ہوتا ہے کہ $ق + ص + ج = ط + ۵$ (ط - ص)

(۲۸) $ط + (۲ + ۵) = ص + (لا + ۵) = ۰$ (۵۲) ایک بیضی (۵۳) تمام انقاط
 ایک بیضی ہے اگر امید ہو اور اب محور لا کا تو ہر ایک تمام انقاط بیضی ہوگا اگر سید ہو
 اور اب محور لا کا تو ہر ایک می دما کہ کا برابر نصف قطر دائرہ کی ہی (۵۴) $لا + ۵ = ط + ص$
 (۱۵۵) لا کی جگہ ط جم بر اور کی جگہ ص جم بر دفعہ ۶۸ کے نتیجہ سابقہ میں رکھو تو سب
 طبری قیمت $ط + ۵$ ہی (۵۷) فرض کرو کہ بیضی کا ایک نقطہ ع ہی اوق مرکز دائرہ کا ہے
 جو شلث ص ع د میں بنایا جاے پس اگر د معین نقطہ ع کا ہو تو ثابت ہو سکتا ہے کہ نصف قطر
 دائرہ کا جو = $\frac{نصف مجموعہ اضلاع}{ع + ۱}$ یہ معین نقطہ کا ہے

اگر لا محدود نقطہ ع کا ہو تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ محدود ق کا لا ہے پس اس طرح معلوم ہو گا کہ
 تمام انقاط مطلوب بیضی ہے (۵۸) وہ نقطہ دریافت کرو جس پر ص ط اوس عمود الماس
 سے ملتا ہے جو نقطہ ع سے کچی جائیں اور وہ نقطہ ہی دریافت کرو جس پر ط نقطہ ع کے
 عمود الماس سے ملتا ہے تو یہ بات ظاہر ہوگی کہ نقطہ منطبق ہوتے ہیں

دسوال باب

(۱) لا ص (ص لا - ط ک) + ط (ط ک + ص لا) = ط ص (۲) قطر اور
 اوس کے مزدوج کو محور خاکر مساوات بیضی کی لو (۳) دفعہ ادا دیکھو

(۸) نقی (ط + جب ر + ص) = ط (۱) اور (۱۰) من (۸) کے

ماحصل کو کام میں لاؤ (۱۲) مثال اکائیجہ (۱۳) جب کہ ر = اور جب کہ ر = ک تو وہ تقاطع کرتے ہیں (۱۴) عرض تقسیم کے اطراف کے مکملی سا دفعہ (۲۰۵)

نق (ی جم ر + جب ر) = ط (۱-ی) اور نق (جب ر - ی جم ر) = ط (۱+ی)

نق (ی جم ر - جب ر) = ط (۱-ی) اور نق (جب ر + ی جم ر) = ط (۱+ی)

محور اصغر کے انجاہوں سے جو ماس نکلے اوکلی مساواتیں یہ ہیں کہ نق ح ر = ص اور نق ح ر = ص

(۱۵) ایک خط تقسیم جو ص پر گزرتا ہی دفعہ ۲۰۵ دیکھو

(۱۷) جم ر = $\frac{ط + ی}{ط + ی}$ اور ی = ط (۱+ی) (۱۸) $\frac{ص}{ط}$ اور $\frac{ص}{ط}$ کے درمیان

(۲۰) دفعہ ۲۰۸ دیکھو (۲۲) مرکز سے جو نصف قطر دائرہ کچا جاوے اوکلی اور ماس کے درمیان

زاویہ کی جیب $\frac{ط}{ط + ی}$ ہی اسین $\frac{ط}{ط + ی}$ = ط (۱-ی) = ط (۱+ی) بموجب ۱۹۶ پس

جب $\frac{ط}{ط + ی}$ = ط (۱+ی) = ط (۱-ی) ہوگی (۲۹) یہ ثابت ہو سکتا ہے

کہ محور قریب البیضوی کا محور بیضوی پر منطبق ہوا سے معلوم ہوا کہ عرض تقسیم کیا $\frac{ط}{ط + ی}$ یا $\frac{ط}{ط + ی}$ ہوگا

(۳۱) بیضوی (۳۲) ایک بیضوی (۳۵) ع ق اور ع ق کی معادلات قطبیہ کا م میں

دفعہ ۲۰۵ دیکھو (۳۸) متوازی الاضلاع کے دو ضلع ان مساواتوں $\frac{ط}{ط + ی}$ جم ر + $\frac{ط}{ط + ی}$ ح ر = ۱±

اور باقی دو ضلع مساواتوں $\frac{ط}{ط + ی}$ ح ر + $\frac{ط}{ط + ی}$ ح ر = ۱± باب نہم کی مثال ۲۲ دیکھو

یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ متوازی الاضلاع کے قطار بیضوی کی مرکز پر تقاطع ہوتی ہیں پس اگر

مرکز بیضوی متوازی الاضلاع کے متصل کے کونوں کے ساتھ ملایا جاتا تو مثلث جو اس طرح پیدا ہوگا

وہ ایک چوتھائی متوازی الاضلاع کی ہوگی اور قبضہ مثلث کا موافق دفعہ ۷ باب ۱ کے معلوم ہے

(۴۱) محدود $\frac{ط}{ط + ی}$ اور $\frac{ط}{ط + ی}$ (۴۲) مثال ۴۱ میں نقطہ تقاطع

کے محدودین دریافت ہوئی ہیں اوکلوچ اور ق سے تعبیر کرو اور باب نہم کی ۳۵ مثال کی صورت

صورت معلوم کا م میں لاؤ (۴۴) سب سے بڑی قیمت اس طرح دریافت ہو سکتی ہے کہ دفعہ ۱۹۸

جو قسٹیں لگا اور کئی دریافت ہوئیں ان کو مندرجہ کو تو وہ خاص (۳۴-۱) دریافت ہوگی

(۲۷) ایک بیضوی (۷۸) بیضوی باعتبار اقطار مزدوج مساوی کے

(۵) مثال کی استغانت سے ثابت ہو سکتی ہے یا ہم جب معمولی محور لیں اگر لگا اور مزدوج

ہوں تو محدودین م کی ط (ط لگا + ص ز) اور ص (ط لگا + ص ز) ہو گئے اور ک

محدودین ط (ط لگا + ص ز) اور ص (ص ز - ط لگا) ہو گئے اسے حل کامل حاصل ہو گا

گیارہواں باب

(۱) ز - ۳ لا = ۳ ط (۲) ایک خط مستقیم

بارہواں باب

(۳) فرض کرو کہ ہر کے سے جو خط کچا جا وہ قریب بیضوی سے اور ع پٹے اور خط ط متنع المقاتبات

نقاط ق اور ق پر تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ع = ط (۱ - ۱) = ۲ ط ح = ۲ ط ح اور

ق ق = ۲ ط ح = ۲ ط ح اور ط ل مطلوب نصف تفاوت ع اور و کا ہی ہو

(۴) مرکز دائرہ کو سید مقرر کرو اب کو محور لگا اور ع ق کا جو قطر متوازی ہی ہو کہ محور کا مقرر

تو مقام النقاط معلوم مساوات ز - لا - ط سے معلوم ہے اور اس سے قائم الزاویہ بیضوی ملے گا

اقطار مزدوج کے معلوم ہے (۹) باب نہم کے مثال ۳۷ سے ہو گا کہ مس = ۱۰ ط + ۱۰ ط

∴ (ح + ط) مس = ق - ۴ ط ح

∴ (ح + ط) ط اھ = و + (ح - ط) (۱۰) دو نو قطر متغنی سے ملنے چاہئے

اور یہ ہی دریافت ہو گا کہ قطر مزدوج قطر تقاطع سے بڑا ہو گا

تیرہواں باب

(۱) مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ (لا - ۲) (لا - ۲) = ۰ اور

اسیو ط وہ دو خطوط متوازیہ کو تعبیر کرتی ہے ایک خط جو او سکا متوازی ہو اور قسٹیں

وسط میں اونکی ہو تو وہ خط مرکزوں کا ہو گا (۳) ح = ۳ ص = ۳ د = ۳

(۳) دخطوط متوازیہ (۴) قریب البیضوی (۵) اگر زاویہ لا پڑتا ہے سے ہو تو البیضوی

اور وہ بڑا بے نسبت ہے کے ہو تو بیضوی اور اگر برابر ہے کے ہو تو ایک خط مستقیم

(۶) مساوات بعید البیضوی کی ط^۱ = د^۱ - ط^۲ ص^۱ - ۴ ط^۱ ص^۱ لا + ۳ ص^۱ لا

اور خط متقطع الحاقات معادلات د^۱ = ± (لا - ط^۲) ص^۱ ۳۸ سے متعین

ہوتے ہیں (۸) مقام النقطا وہ خط مستقیم جو برابر محوروں پر منطبق ہوتا ہے (۱) دفعہ ۲۰۰ کو

کام میں لاؤ (۱) ط^۱ ۳۸ (۳) مس^۱ ص^۱

(۱۴) ([ھے د + لا ھے ب] - ۲ ھے ب - لا ھے ب + د) ھے ب + د ھے ب = ۰

(۱۵) (۱) دائرہ جس کا مرکز بیضوی معلوم کے دوسرے اس کے بیضوی (۲) بیضوی جس کا مرکز بیضوی

معلوم کا دوسرا اس کے بیضوی

(۱۵) مساوات (د - ۳ لا + ۱) (د - ۲ لا + ۴) = ۰ اور اس کے دخطوط مستقیم تعمیر کرتا ہے

(۲۴) باب ششم کی آخر مثال میں نتیجہ معلوم کو کام میں لاؤ (۲۶) مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے کہ

$$(لا + د) + (لا - د) - ط^۱ (لا + د - ۳ لا - د) = ۰$$

چودھواں باب

میں لاؤ

(۲) ہر ایک تمام النقطا بیضوی (۴) (۵) (۶) میں دفعہ ۲۹ کی مساوات کام

(۷) مساوات بیضوی کی ط^۱ = د^۱ - ط^۲ ص^۱ لا + ۳ ص^۱ لا = د^۱ - ط^۲ ص^۱ لا + ۳ ص^۱ لا

اسے معلوم ہوا کہ مساوات ط^۱ = د^۱ - ط^۲ ص^۱ لا + ۳ ص^۱ لا بعض اوس مقام النقطا کو تعمیر کرتا ہے

جو نقطہ ماس میں گذرتا ہے (۱۰) مساوات بعید البیضوی کی (د - ق) ص^۱ لا = (لا - ج) ط^۱ د^۱

(۱۲) فرض کرو کہ د^۱ دو متعین کو تعبیر کریں جو موافق ایک ہی محدود لا کے لئے جائیں تو

$$د^۱ = (ص^۱ لا + ص^۱ لا - ط^۱ لا + د^۱) - د^۱ = ص^۱ لا - (ص^۱ لا - ط^۱ لا + د^۱)$$

مساواتین محمود الماسون کی موجب دفعہ ۲۸۲ کے ہمہ میں

$$(د - د^۱) (ط^۱ لا + ص^۱ لا) = (د^۱ + ص^۱ لا) (لا - لا) اور (د - د^۱) (ط^۱ لا + ص^۱ لا) = (د^۱ + ص^۱ لا) (لا - لا)$$

اور جمع کرنے سے (ط-ص) لہ (د+۲ ص لہ) = صرف (۱)

تفریق کرنے سے ص (د+ص لہ) - (ط-ص) لہ = لہ-لہ

اس واسطے لہ (۱+۲ ص-ط) = لہ-ص د . . . (۲)

(۲) سے قیمت لہ کی نکال کر (۱) میں رکھو تو مساوات مطلوب حاصل ہو جائیگی مقام النقاط

(۳) مقام النقاط وہ تراش مخروطی ہے جو دہ اور تر پر گذرتی ہے اور خطوط سینہ کے نقطہ

تقاطع پر (۱۹) دو مقام النقاط جنہیں سے ایک بیضوی دوسری قریب بیضوی (۲۰) ایک دائرہ

(۲۳) دفعہ ۲۹۳ دیکھو (۲۶) دفعہ ۲۹۴ میں جو مساوات قریب بیضوی کی لکھی ہوئی اسے

اور باب چہارم کی ۲۱ مثال میں جو مساوات دائرہ کی ہے اسے کام میں لاؤ (۲۰) لی حساب اس

(۲۰) $\frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3}$ (۳۲) باب دوم کی ۱۲ مثال دیکھو دوسری میں

وہ خط مستقیم (۳۸) ایک دائرہ ہی جس کا مرکزہ ہے

(۴۴) $\frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3} = 1$ (۴۶) مساوات د=۴ ص (لا-ط) ہے

(۵۰) خط $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ تریصف و ترماس کی کتاب اس واسطے متوازی محور قریب بیضوی

کا ہے اگر نقطہ (۵۰) کے سے ایک خط دی زاویہ تماس کے ساتھ بناتا ہوا کھینچا جائے

جو محور بناتی ہیں تو ماسکہ اس خط میں سے ہو گا جس کی مساوات

د (ط+۲ ص حم ر) + ص (لا-ط) = ہی اور علیٰ ہذا القیاس ایک خط (د ص)

ایسا لکھ کے ہیں کہ او سینہ ہی ماکھو (۵۲) مساوات ایک عمود الماس کی

د=۲ لا-ط م-ط م میں اور دوسرے عمود الماس کی مساوات لا=م-د-ط م-ط م

فرض کرو اور نیز م-م کو جمع کرنے سے د+لا=م (لا-د) اول مساوات میں

م کی قیمت مندرج کرو اور اختصار کرو تو ۲ ط (لا+د) = (لا-د) حاصل ہو گا

(۵۳) ہم کو م

د-م لا= $\frac{م (ط-ص)}{م (ط+ص)}$ اور م د+لا= $\frac{م (ط-ص)}{م (ط+ص)}$

$\frac{م (ط-ص)}{م (ط+ص)} = \frac{م (ط-ص)}{م (ط+ص)}$

مربع سے ساقط کرنا چاہئے مجذور کرو اور جمع کرو اور مختصر کرو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$5 + 2 = 7 \quad (ط + ص) = (ط - ص) \quad (1)$$

اور نیز (د - م ل) (ط + م ص) = (م + د ل) (م ط + ص) مختصر کرنے سے ہلکویہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(ط + د - ص ل) (م - ل) = 2 - ل د (ط + ص) \quad (2)$$

$$(1) \text{ اور } (2) \text{ سے} \\ (ط + د - ص ل) (ل + د) (ط + د + ص ل) = (ط + ص ل) (ط - د - ص ل)$$

(۵۴) دفعہ ۹۲ کی شکل دیکھو وہ بیضی اور قطار مزدوج کو تعبیر کرتی ہی باب نہم کی ۲۳ شالین جو مساوات لکھی ہے اسکو مساوات اوس عمود المماس کی مقرر کرو جو نقطہ ع سے کھینچا جائے اور اسکے متماثل مساوات اوس عمود المماس کی لوجہ نقطہ د سے کھینچا جائے اور ان عمود المماسوں کے نقطہ تقاطع کو ق سے اور اس کے محدین کو ل اور د ہی تعبیر کرو یہ دریافت ہوگا کہ

$$ط ل = (ط - ص) (ح بر - ح م بر)$$

$$ص د = (ص - ط) (ح بر - ح م بر)$$

اور سطر ا و ن عمود المماسوں کے نقطہ تقاطع کے محدین جو نقاط ع اور د سے کھینچے جائیں تحقیق ہو سکتے ہیں اس نقطہ کو ر سے تعبیر کرو اور پہلے شلٹ س ع کے رقبہ کو بیان کرو تو وہ ایک جوتہای رقبہ مطلوب کا ہوگا

(۵۵) مربع کے مرکز کو مبداء اور اضلاع مربع کے متوازی محور مقرر کرو اور مساوات دائرہ کی

$$ل + د = 2 \quad ط ل اور تر اشش مخروطی کی مساوات د - ط = ل د (ط - ل) ل$$

مساوات مماس دائرہ کی نقطہ (ل د د م) پر ل د ل + د م = ۲ ط اور مساوات مماس تر اشش مخروطی کی نقطہ (ل د د م) پر د - ل ل د = ط (۱ - ل) یہ مساوات متعم

ایک ہی خط کو تعبیر کرتی ہیں پس ل اور ل د اور د کو ساقط کریں تو ایک مساوات حاصل ہوگی جسے مقام النقطا مطلوب حاصل ہوگا اور یہ دریافت ہوگا کہ مساوات سطح لکھی جاتی

$$[(ل + د - 2 ط)] [ط (ل + د) - 2 ل د د] = 0$$

$$n \text{ یں } p = (2 \text{ س } 1 \text{ س } 0 + 8 \text{ طاس } 1 + 8 \text{ طاس } 2 - 8 \text{ س } 3 - 8 \text{ س } 4 - 8 \text{ س } 5)$$
$$1 - \frac{r_k}{r_v} + \frac{r_a}{r_p} = \left(\frac{\text{تبع}}{\text{سد}} \right)$$

(۶) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ (۱) مساوات نریشن مخروطی کی

اور اس کی (م + ن) مھ + ل ب = اور اب کی (م + ن) مھ + (ل + ن) ب۔

$$(۲۱) \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} = ۰ \quad (۲۲) \text{ فرض کرو کہ کسی خط لہد + م ب + ن ل ر =}$$

یہ واقع ہے اور مہ اور پ اور ک قیمتیں یہ ون وکر کی بلحاظ ماسکہ کہی تو بموجب دفعہ

۸۱ اکہ فہرہ = باب = اگر مرل نصف محور اصغر ان قیمتوں کو مساوات معلوم میں

رکھ کر ٹکڑیوں میں حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ یعنی ایک کر + م کر حصہ = ایک حصہ ہے
اسے ثابت ہوتا ہے کہ مقام انقطاع نقطہ کا اثر اس پر جو کچھ ہے جو شلٹ کے کونوں کے تقاطع پر گرتی ہے

(۲۵) تراشہا مخروطی کی مساواتیں ان مساواتوں کے تعبیر ہوتے ہیں

$$(۱) \text{ ب ل} - \text{ھ} = ۰ \quad (۲) \text{ ل} - \text{ھ} = \text{ب} = ۰ \quad (۳) \text{ ھ} - \text{ب} - \text{ل} = ۰$$

اب (۱) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ ب (ل + ب - ۲ھ) - (ھ - ب) = ۰

$$(۲) \quad \text{ل} (\text{ل} - \text{ھ} + \text{ل} - ۲) - (\text{ب} - \text{ل}) = ۰$$

$$(۳) \quad \text{ھ} (\text{ب} + \text{ھ} - ۲\text{ل}) - (\text{ل} - \text{ھ}) = ۰$$

اسے ثابت ہوتا ہے کہ تراشہا مخروطی کے ماسوں کا نقطہ ان مساواتوں سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ل} + \text{ب} - ۲\text{ھ} = ۰ \quad \text{و ھ} + \text{ل} - ۲\text{ب} = ۰ \quad \text{اور ب} + \text{ھ} - ۲\text{ل} = ۰$$

یہ تین خط جدا جدا گانہ خطوط ھ = ۰، ب = ۰، ل = ۰ کو اون تین نقطوں پر قطع کرتے ہیں

جو خط ھ + ب + ل = ۰ میں واقع ہوتے ہیں یہ (۱) اس طرح کہی جاتی ہے کہ

$$\text{ب} (\text{ل} + \text{ھ} - ۲\text{ب}) - (\text{ھ} + \text{ب} - ۲\text{ل}) = ۰ \quad \text{اور (۲) اس طرح کہی جاتی ہے کہ}$$

$$\text{ھ} (\text{ل} + \text{ھ} - ۲\text{ب}) - (\text{ب} + \text{ھ} - ۲\text{ل}) = ۰ \quad \text{اور اسے ثابت ہوتا ہے کہ}$$

$$\text{ل} + \text{ھ} - ۲\text{ب} = ۰ \quad \text{ماس مشترک (۱) اور (۲) کا ہی اور یہ ماس مشترک}$$

$$\text{ل} = ۰ \quad \text{سے اوس نقطہ پر ہیں جس پر ب} + \text{ھ} - ۲\text{ل} = ۰ \quad \text{اے ملتا ہے اور علی القیاس}$$

(۲۶) اول بعید البضوی کی مساوات ب ل = ل ل ج ب ہے اور علی القیاس اور ل کی

کیفیت ہے

(۲۷) دفعہ ۴۷ دیکھو (۲۸) اور (۲۹) ثلث کے اضلاع پر منطبق محور محور فرض کرو

مثلاً (۲۹) میں ہم کو معلوم ہے کہ ط ھ + ص ب + س ل = ط ل ج س

پس مساوات اس طرح لکھی جاتی ہے کہ س ل ھ ب (ل ب + م ھ) (ط ص ج س + ط ھ + ص ب)

اور س ل کو محور ل کا اور س ب کو محور د کا مقرر کرو تو یہ حاصل ہوگا کہ

ھ = ل ج س اور ب = د ج س اور ھ اور ب کی قیمتیں یہ کہو تو مساوات

ل اور د میں انسی حاصل ہوگی کہ ل د کا امتحان مول کے ذریعہ ہوگا دفعات ۴۷ اور ۴۸ دیکھو

$$(۳۰) \quad \frac{\text{ل}}{\text{ل}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ل}}{\text{ل}}$$

$$(۳۱) \quad \text{ل} (\text{م} - \text{ن}) - \text{م} (\text{ن} - \text{ل}) = \text{م} (\text{ل} - \text{م}) - \text{ل} (\text{م} - \text{ل})$$

(۳۲) فرض کرو کہ صف ۱ = مساوات دائرہ اندرونی اور صف ۲ = مساوات دائرہ بیرونی
کی ہیں یہ فرض ورنہ نہیں کہ مساواتیں اپنی سادہ صورت میں ہوں دفعہ ۱۰ دیکھو اگر ق ایک مقدار
مستقل ہو تو مناسب مقدار مستقل صف ۱ - ق صف ۲ = خط مطلوب کو تعبیر کریگی اس طرح ہر کو

یہ حاصل ہو گا کہ

$$\text{ہے حجم لے} + \text{ب حجم لے} + \text{ا حجم لے} - \text{م ب ل حجم لے} = \text{ج م ل}$$

$$- \text{ا ل حجم ج م ل} - \text{م ب ل حجم ج م ل} = \text{ج م ل}$$

$$- \text{ق (ب ل حجم ا ل + ل حجم ب ب + ہ ب ل حجم ج م ل)}$$

$$= \text{(ط ل حجم ص ب + س ل ل) (ل ل حجم + م ب + ن ل)}$$

نکرتے ہیں

اس میں ل اور م اور ن دریافت کرتے ہیں ارتقا میں مثلاً کے مقابلہ کرنے سے ہم ل اور م اور ن کو

(۳۳) یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ مساوات

$$\text{ن ب + م ل} = \frac{\text{ن ل} + \text{ن ہ}}{\text{ص}}$$

ایک قطر کو تعبیر کرتی ہے اس واسطے کہ یہ مساوات اس خط کو تعبیر کرتی ہے جو ل اور ب کے ماسون کے
نقطہ تقاطع پر گذرتا ہے پس اسے معلوم ہوا کہ مرکز تراش مخروطی کا متعین ہو گیا

$$\text{ل ب + م ل} = \frac{\text{ل ل} + \text{ن ہ}}{\text{ص}} = \text{م ب ل}$$

پس مساوات مطلوب دریافت ہو سکتی ہے وہ یہ ہے کہ

$$\text{م (ط ل - ص م + س ن)} = \text{ن (ط ل + ص م - س ن)}$$

(۳۴) مساوات مطلوب کے واسطے فرض کرو کہ ل = مقدار مستقل کے معنی

ل = ق (ط ل + ص ب + س ل) پس شال ۲ کی ماحصل کو کام میں لگنے سے مساوات
مطلوب (ل ص + م ط) (ط ل + ص ب) - ن ط ص ل = حاصل ہو سکے گی

(۳۵) مساوات تراش مخروطی کی اس طرح مقرر کرو کہ ہ ب = ق ل اور مساوات
خط ق کی یہ ہو گی کہ ہ ب = ۰ اور مساوات وتر کی ہ ب = ن ل

تقاطع تقاطع میں ملے جابین اور اخر مساوات کی صورت بالقمریہ سے ہم یہ نتیجہ نکالے ہیں
 کہ خط وہی زاویہ خط ہے = . سے بناتا ہے جو او خط ب = . سے بناتے ہیں فقط

تمام شد ۸ - دسمبر ۱۸۷۴ء